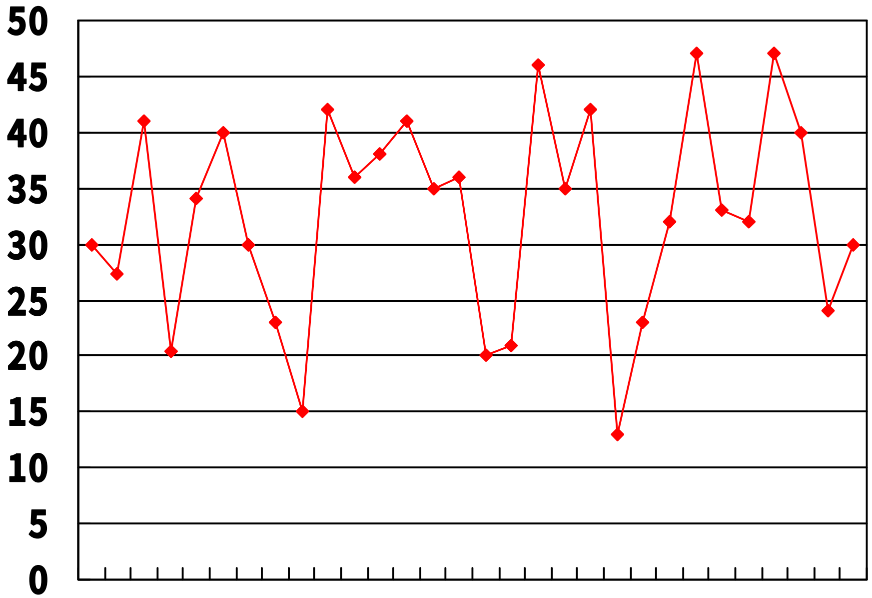
ブラックショールズの作り

香取研究室　大熊裕哉



株価が右下がりでも上がりでもない場合を考える

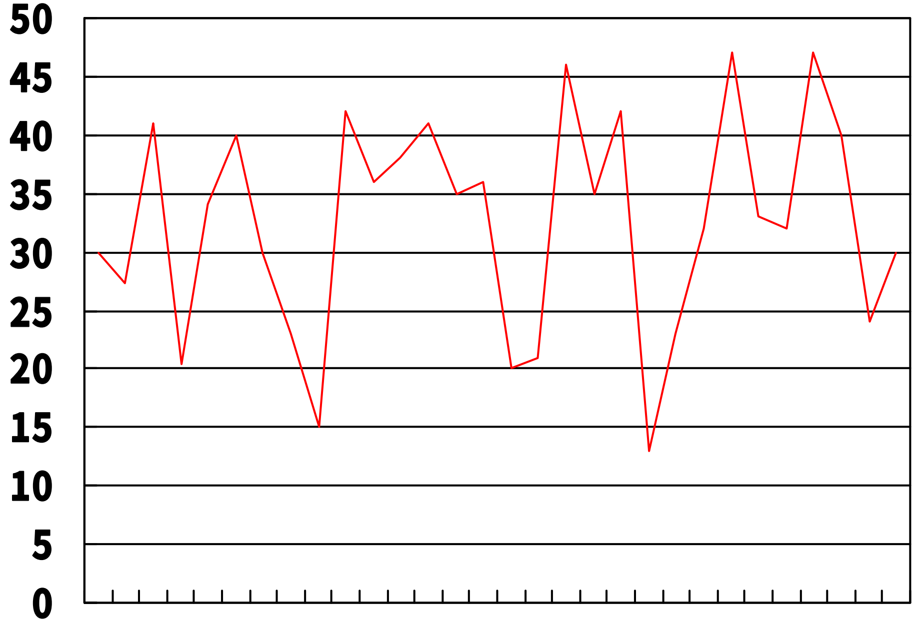
ランダムウォークの条件

時点を$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_n$

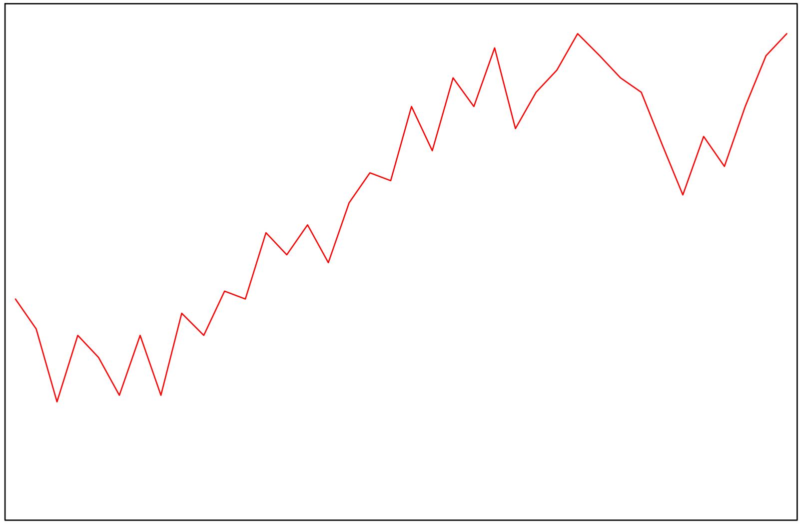
そのときの時系列Z (t_i) をZ (t_1) ,Z (t_2) ,Z (t_3) ……Z (t_n) としたときの時系列の変化[redacted]は$\Delta Z = Z(t_k) - Z(t_{k-1})$

ΔZは平均0、分散Δtの正規分布Nに従う。

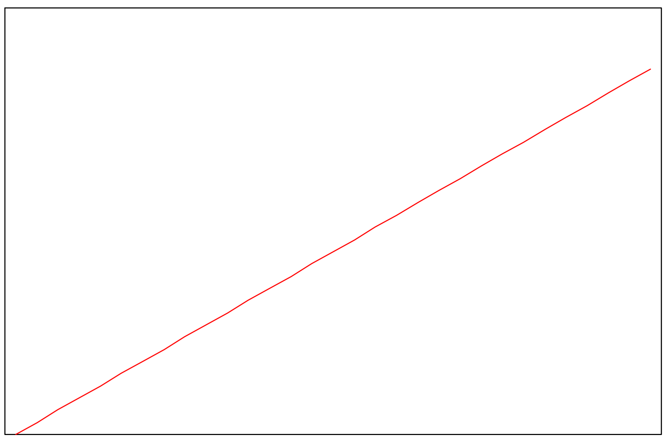
次に図のランダムウォークのグラフの幅Δtを0に近づける。



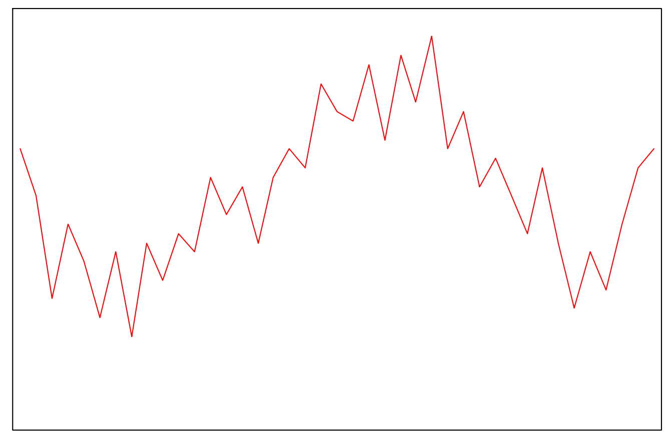
図のような連続的な時系列Z（t）の動きをブラウン運動といいます。ランダムウォークの極限がブラウン運動になります。



次に右上がりのとき



＋



時系列X(t)=傾きaの直線+ブラウン運動の時系列Z(t)

X(t)＝a･t+b･Z(t)　(a;ドリフト、b;ディフィージョン)

伊藤過程

時系列X(t)の変化量ΔXが次の式にしたがって示せます。

$$\Delta X = a(x.t) \cdot \Delta t + b(x.t) \cdot \Delta Z$$

このX(t)の動きを伊藤過程といいます。

またΔt→0のとき

$$dX = a \cdot dt + b \cdot dZ$$

この伊藤過程を利用すると'伊藤のレンマ'を出すことができます。

伊藤のレンマの説明

Xとtの関数f (X.t) の変化量Δfは、2変数関数のテイラー展開から

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(\Delta X)^2$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t}\Delta t\cdot\Delta X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\Delta t \quad \cdots\cdots\cdots$$

Xが伊藤過程にしたがっているので、ΔXに

a(X,t)・Δt+b (X,t) ・ΔZ

を代入します。

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\left\{a(X,t)\cdot\Delta t + b(X,t)\cdot\Delta Z\right\} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\Delta t$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\left\{a(X,t)\cdot\Delta t + b(X,t)\cdot\Delta Z\right\}^2$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial X\partial t}\left\{a(X,t)\cdot\Delta t + b(X,t)\cdot\Delta Z\right\}^2$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial X\partial t}\left\{a(X,t)\cdot\Delta t + b(X,t)\cdot\Delta Z\right\}\cdot\Delta t \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\cdot(\Delta t)^2$$

$+\cdot\cdot\cdot\cdot$

これをΔ→0でまとめると････

Xとtの関数の動きは

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial X} \cdot a(X,t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \cdot \{b(X,t)\}^2 \right) \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial X} \cdot b(X,t) \cdot dZ$$

に従います。

これを**伊藤のレンマ**といいます。

例　株価Sが伊藤過程

$dS = a(S,t) \cdot dt + b(S,t) \cdot dZ$ に従っているとき、

金融派生証券の価格 $f(S,t)$ の動きは

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot a(S,t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \{b(S,t)\}^2 \right) \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot b(S,t) \cdot dZ$$

に従う。

ポートフォリオの定義

ポートフォリオとはいくつかの株式、債券、通貨などの資産の組み合わせのこと。

ポートフォリオの価値

$$W(t) = n_1(t)W_1 + n_2(t)W_2 + \cdots\cdot + n_p(t)W_p(t)$$

ポートフォリオの収益率

$$R(t) = \frac{n_1(t)W_1(t)}{W(t)}R_1(t) + \frac{n_2(t)W_2(t)}{W(t)}R_2(t) + \cdots \frac{n_p(t)W_p(t)}{W(t)}R_p(t)$$

価格	$w_1(t)$	$w_2(t)$	・・・・・・	$w_p(t)$
単位数	$n_1(t)$	$n_2(t)$	・・・・・・	$n_p(t)$
収益率	$R_1(t)$	$R_2(t)$	・・・・・・	$R_P(t)$

ブラックショールズの偏微分方程式を作る

株価Sが伊藤過程

$$dS = \mu S \cdot dt + \sigma S \cdot dZ$$ に従ってるとします

伊藤のレンマから

“株価Sよる派生証券の価格f (S,t) の微分d f”は

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right) \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma S \cdot dZ$$

に従います。

ポートフォリオを作る

株価Sの株式を $\frac{\partial f}{\partial S}$ 単位買い、価格 $f(S,t)$ の派生証券を1単位売る

このポートフォリオの価値は

$$\Pi = \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S - 1 \cdot f(S,t)$$

Δt時間でのポートフォリオの変化量は

$$\Delta\Pi = \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - 1 \cdot \Delta f$$

となります。

このときのポートフォリオの変化量に

$$\Delta S = \mu S \cdot \Delta t + \sigma S \cdot \Delta Z$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right) \cdot \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma S \cdot \Delta Z$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
\Delta \Pi &= \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \Delta S - 1 \cdot \Delta f \\
&= \frac{\partial f}{\partial S} \left\{ \mu S \cdot \Delta t + \sigma S \cdot \Delta Z \right\} - \left\{ \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right\} \cdot \Delta t - \frac{\partial f}{\partial S} \cdot \sigma S \cdot \Delta Z \\
&= \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 \right) \cdot \Delta t
\end{aligned}$$

となります。

この右辺
$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2 S^2\right)\cdot\Delta t$$
の中は、ブラウン過程の動きの部分ΔZが消え去ってます。
つまり、このポートフォリオはこのΔt時間の間、リスク（分散）がなくなっていることを意味します。
そこで、非危険利子率rとすると
$$\frac{\partial f}{\partial S}\cdot\Delta S-1\cdot\Delta f=r\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S-1\cdot f(S,t)\right)\cdot\Delta t$$ が成立し
$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2 S^2\right)\cdot\Delta t=r\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S-1\cdot f(S,t)\right)\cdot\Delta t$$
となるので、両辺からΔtをとり、まとめると
$$r\cdot f(S,t)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\sigma^2 S^2+r\cdot\frac{\partial f}{\partial S}\cdot S$$

ブラックショールズの偏微分方程式

$$r \cdot f(S,t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 S^2 + r \cdot \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S$$

★ この式は株価S派生証券の価格をf（S,t）としたときf（S,t）が満たすべき偏微分方程式

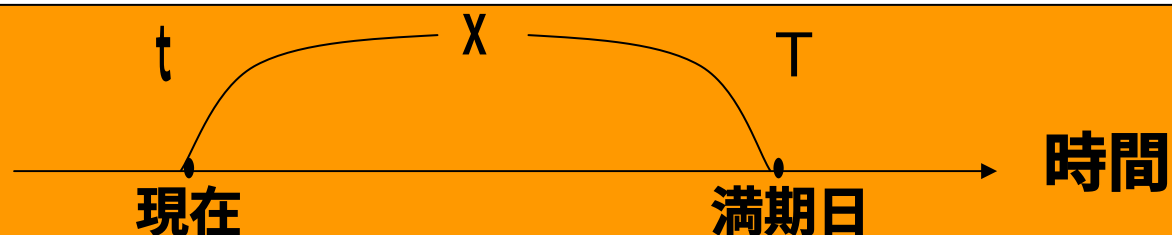
★ この偏微分方程式が解ければ、派生証券（株価オプション）の価格評価公式が求められる

ブラックショールズの偏微分方程式

$$f_t + r \cdot S \cdot f_s(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot f_{ss}(S,t) = r \cdot f(S,t)$$

境界条件： $f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - X \cdots if\,; S_T \geq X \\ 0 \cdots\cdots\cdots\cdots if\,; S_T < X \end{cases}$

記号の説明



S :**現在の株価**

σ :**株価のボラティリティ**

r :**非危険利子率**

$f(S,t)$:**コールオプションの価値（1株当たり）**

S_T :**時点Tの株価**

X :**オプションの行使価格**

$$f_t + r \cdot S \cdot f_s(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot f_{ss}(S,t) = r \cdot f(S,t)$$

1回目の変数変換

$$\begin{cases} x = T - t \\ u = \log \dfrac{S}{X} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2} \right)(T - t) \end{cases}$$

と定義

$$f(S,t) = e^{-r(T-t)} \cdot y(u,x) = e^{-rx} \cdot y(u,x)$$

とすることによってブラックショールズの偏微分方程式を簡単な形にします。

$$f_S(S,t),\ f_t(S,t),\ f_{SS}(S,t)$$

をそれぞれ計算すると、、、、

$$f_S(S,t) = \frac{\partial}{\partial u} f(S,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial x} f(S,t) \cdot \frac{\partial x}{\partial S}$$

$$= e^{-rx} \cdot y_u(u,x) \cdot \frac{1}{S}$$

$$f_t(S,t) = \frac{\partial}{\partial u} f(S,t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(S,t) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= e^{-rx} \cdot \frac{\partial}{\partial u} y(u,x) \cdot \left\{ -\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right\} + \left\{ -r \cdot e^{-rx} \cdot y(u,x) + e^{-rx} \cdot \frac{\partial}{\partial x} y(u,x) \right\} \cdot (-1)$$

$$= e^{-rx} \left[-\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot y_u(u,x) + r \cdot y(u,x) - y_x(u,x) \right]$$

$$f_{SS}(S,t) = \frac{\partial}{\partial S} \left\{ e^{-rx} \cdot \frac{\partial}{\partial u} y(u,x) \cdot \frac{1}{S} \right\}$$

$$= e^{-rx} \left[\frac{\partial^2}{\partial S \partial u} y(u,x) \cdot S^{-1} - \frac{\partial}{\partial u} y(u,x) \cdot S^{-2} \right]$$

$$= \frac{e^{-rx}}{S^2} \left[y_{uu}(u,x) - y_u(u,x) \right]$$

$$f_t + r \cdot S \cdot f_s(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot f_{ss}(S,t) = r \cdot f(S,t)$$

に $f_S(S,t),\ f_t(S,t),\ f_{SS}(S,t)$ の値を代入すると

左辺 $$= e^{-rx}\left[-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot y_u(u,x) + r \cdot y(u,x) - y_x(u,x)\right]$$

$$+ r \cdot S \cdot e^{-rx} \cdot y_u(u,x) \cdot \frac{1}{S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{e^{-rx}}{S^2}\left[y_{uu}(u,x) - y_u(u,x)\right]$$

$$= e^{-rx}\left[-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot y_u(u,x) + r \cdot y(u,x) - y_x(u,x) + r \cdot y_u(u,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot y_{uu}(u,x) - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot y_u(u,x)\right]$$

$$= e^{-rx}\left[r \cdot y(u,x) - y_x(u,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot y_{uu}(u,x)\right]$$

右辺 $$= r \cdot e^{-rx} \cdot y(u,x) = e^{-rx}\left[r \cdot y(u,x)\right]$$

左辺＝右辺とすると

$$e^{-rx}\left[r\cdot y(u,x)-y_x(u,x)+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot y_{uu}(u,x)\right]=e^{-rx}\left[r\cdot y(u,x)\right]$$

となり、両辺をまとめると

$$r\cdot y(u,x)-y_x(u,x)+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot y_{uu}(u,x)=r\cdot y(u,x)$$

つまり

$$\frac{1}{2}\sigma^2\cdot y_{uu}(u,x)-y_x(u,x)=0$$

ブラックショールズの偏微分方程式は

☆ $$y_{uu}(u,x)-\frac{2}{\sigma^2}y_x(u,x)=0$$

このときの境界条件は

$$y(u,0)=\begin{cases} X\cdot(e^u-1)\cdots\cdot u\geq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad \cdots\cdot u<0 \end{cases}$$

$$y_{uu}(u,x) - \frac{2}{\sigma^2} y_x(u,x) = 0$$

は、変数分離形を利用すると、

$$y(u,x) = V(u) \cdot W(x)$$

$$y_{uu}(u,x) = V_{uu}(u) \cdot W(x)$$

$$y_x(u,x) = V(u) \cdot W_x(x)$$

であるので

$$y_{uu}(u,x) - \frac{2}{\sigma^2} y_x(u,x) = 0$$

に代入すると

$$V_{uu}(u) \cdot W(x) - \frac{2}{\sigma^2} \cdot V(u) \cdot W_x(x) = 0$$

したがって

$$V_{uu}(u) \cdot W(x) = \frac{2}{\sigma^2} \cdot V(u) \cdot W_x(x)$$

次にuの関数を左辺に、xの関数を右辺にそろえると

$$\frac{V_{uu}(u)}{V(u)} = \frac{2}{\sigma^2}\frac{W_x(x)}{W(x)}$$

この式は

“左辺はuだけの関数＝右辺はxだけの関数”

なので

$$\frac{V_{uu}(u)}{V(u)} = \frac{2}{\sigma^2}\frac{W_x(x)}{W(x)} = -k^2$$

から

$$\frac{V_{uu}(u)}{V(u)} = -k^2 \qquad \frac{2}{\sigma^2}\frac{W_x(x)}{W(x)} = -k^2$$

のように、2つの微分方程式になります。

次にこの2つの微分方程式を解きます。

$\dfrac{V_{uu}(u)}{V(u)} = -k^2$ を解く

$$V_{uu}(u) + k^2 \cdot V(u) = 0$$

とすると、この微分方程式は

“定数係数2階線型微分方程式”

であるので、解の公式より

$$V(u) = C(k) \cdot \cos(ku) + D(k) \cdot \sin(ku)$$

となります。

$$\frac{W_x(x)}{W(x)} = -\frac{\sigma^2 k^2}{2}$$ を解く

$$W_x(x) + \frac{\sigma^2 k^2}{2} \cdot W(x) = 0$$

とすると、この微分方程式は

“変数分離形”

であるので、解は

$$W(x) = C_3 \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x}$$

以上のことから、$y(u,x)$ は

$$y(u,x) = V(u) \cdot W(x)$$

$$= \left(C(k) \cdot \cos(ku) + D(k) \cdot \sin(ku)\right) \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x}$$

これが求める偏微分方程式の解のひとつです。

この解をすべての$k(0 \leq k < \infty)$について重ね合わせた関数

$$\int_0^\infty \left(C(k)\cdot\cos(ku) + D(k)\cdot\sin(ku)\right)\cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}x} dk$$

も偏微分方程式になります。

そこで、あらためて

$$y(u,x) = \int_0^\infty \left(C(k)\cdot\cos(ku) + D(k)\cdot\sin(ku)\right)\cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}x} dk$$

とおきます。

次にこの解がはじめに与えられた条件を満足するように、係数$C(k), D(k)$を決めます。

$x=0$とし

$$y(u,0) = g(u)$$

とおきます。

$$g(u)=\int_0^{\infty}\left(C(k)\cdot\cos(ku)+D(k)\cdot\sin(ku)\right)dk$$

が成り立つように係数 $C(k), D(k)$ 決めると、
フーリエ積分展開から

$$C(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\cdot\cos kudu$$

$$D(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\cdot\sin kudu$$

になります。

そして、次のページで記号が混乱するので、その混乱を避けるために

$$C(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot\cos kada$$

$$D(k)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot\sin kada$$

とします。

ブラックショールズの偏微分方程式の解

$$f(S,t)=e^{r(t-T)}\cdot y(u,x)$$

の右の部分

$$y(u,x)=\int_0^{\infty}\left(C(k)\cdot\cos(ku)+D(k)\cdot\sin(ku)\right)\cdot e^{-\frac{\sigma^2k^2}{2}x}dk$$

の2つの係数 $C(k), D(k)$ にフーリエ積分定理の結果を代入すると

$$y(u,x)=\int_0^{+\infty}\left[\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot\cos kada\right\}\cos ku\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot\sin kada\right\}\sin ku\right]\cdot e^{-\frac{\sigma^2k^2}{2}x}dk$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}}\right)^2}da$$

2回目の変数変換

$$v = \frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}}$$ とおく

このとき

$$a = u + \sigma\sqrt{x}v$$

なので、境界条件も

$$g(a) = g(u+\sigma\sqrt{x}u) = \begin{cases} X\cdot\left(e^{u+\sigma\sqrt{x}u} - 1\right) & \cdots\cdots v \geq -\dfrac{u}{\sigma\sqrt{x}} \\ 0 & \cdots\cdots v < -\dfrac{u}{\sigma\sqrt{x}} \end{cases}$$

に変わります。

ブラックショールズの偏微分方程式の解

$$f(S,t) = e^{r(t-T)}\cdot y(u,x)$$ から

$$y(u,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}da=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\cdot\sigma\sqrt{x}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(a)\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}dv$$

g(a) の境界条件に注目すると

$$y(u,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}(X\cdot e^{u+\sigma\sqrt{x}u}-X)\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}dv$$

そこから

$$=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}X\cdot e^{u+\sigma\sqrt{x}u}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}dv}_{\text{A}}-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty}X\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}dv}_{\text{B}}$$

と2つの部分に分けて、それぞれをA,Bとする。

Aについての積分

$$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty} X\cdot e^{u+\sigma\sqrt{x}u}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty} S\cdot e^{rx-\frac{\sigma^2 x}{2}}\cdot e^{\sigma\sqrt{x}u}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\,dv$$

$$=S\cdot e^{rx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(v-\sigma\sqrt{x}\right)^2}\,dv$$

次の変数変換

$$z=v-\sigma\sqrt{x}$$

とすると

$$A=S\cdot e^{rx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}-\sigma\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

となる。

Bについての積分

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty} X \cdot e^{-\frac{1}{2}v^2} dv$$

ここで、次の変数変換

$$Z = V$$

とすると

$$B = X \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

となり、最後にAとBを合わせていきます。

$$y(u, x) = A - B$$

$$= S \cdot e^{rx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}-\sigma\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - X \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= S \cdot e^{rx} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - X \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)$$

最後にブラックショールズの解

$f(S,t) = e^{r(t-T)} \cdot y(u, x)$ **に代入すると**

$$f(S,t) = e^{-rx}\left\{S \cdot e^{rx} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - X \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)\right\}$$

$$= S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - X \cdot e^{-rx} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)$$

となり、ブラックショールズの公式が求まる

ブラックショールズを使ってオプション価格を導きだし、実際のオプション価格と比較しました

理論値（コールオプション）

権利行使価格	８５００円	８７５０円	９０００円	金利（%）
１ヵ月後のオプション価格	６３４円	４９６円	３８１円	０．４７
２ヵ月後のオプション価格	８１９円	６９０円	５７６円	０．５６

実際の値（コールオプション）

権利行使価格	８５００円	８７５０円	９０００円	金利（%）
１ヵ月後のオプション価格	６９５円	５３０円	４１０円	０．４７
２ヵ月後のオプション価格	８７０円	７２０円	５８０円	０．５６

σ：株価のボラリティーは４４．５で行いました。

理論値 (プットオプション)

権利行使価格	8500円	8750円	9000円	金利 (%)
1ヵ月後のオプション価格	295円	407円	541円	0．47
2ヵ月後のオプション価格	475円	595円	731円	0･56

実際の値 (プットオプション)

権利行使価格	8500円	8750円	9000円	金利 (%)
1ヵ月後のオプション価格	340円	445円	549円	0．47
2ヵ月後のオプション価格	520円	615円	740円	0･56

まとめ

- 理論値よりも実際の値の方が高い
- コールオプション価格は権利行使価格が高いほどオプション価格が低い
- プットオプション価格は権利行使価格が高いほどオプション価格は高い
- 期間が長くなるとオプション価格は高くなる

参考書籍　増補版 金融･証券のためのブラック･ショールズ微分方程式.
石村貞夫･石村園子 著

よくわかるブラック･ショールズモデル 蓑谷千凰彦　著