異方的な砂山モデルの砂輸送

河原　陽明

中央大学　理工学部　物理学科　4年

平成22年　1月21日（木）

発表内容

- 研究目的
- モデルの説明
- プロパゲータの導出
- 砂の輸送式の導出
- 結果
- まとめ
- 考察

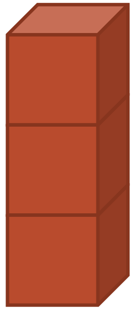
研究目的

- 砂山モデルの拡散のルールを異方的にする変更を施したモデルにおいて定常状態では境界に砂を入れることでどれだけの砂をもう一方の境界に届けることができるのかを調べる。

モデルの説明

砂山モデルとは

BTW(bak,Tang,and Wiesenfled)モデルとも呼ばれ、自己組織化臨界現象を示す確率的セルオートマトンモデルであり砂山と対応させて考えることができる。



モデルの説明（続き）

普通(等方的)の砂山モデル
（1次元）

定義

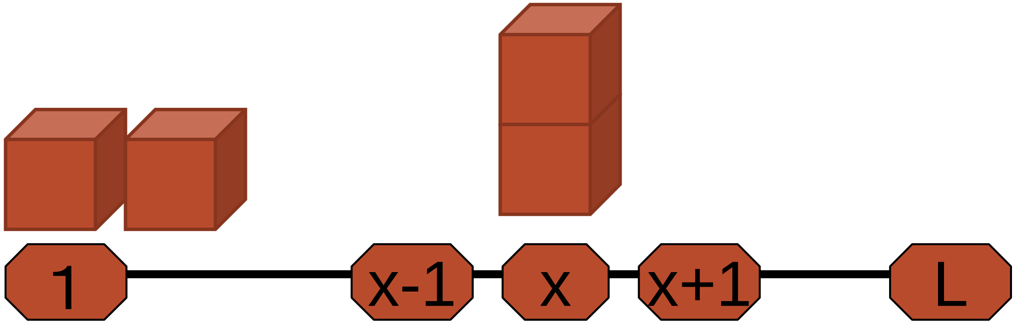
一次元格子Λ_L＝{1,2,…L}

格子上の粒子数

z(x)＝{0,1,2,3…}

格子上の粒子数の臨界値

z_c＝2



この格子上に砂を落としていく。

z(x)=z(x)+1

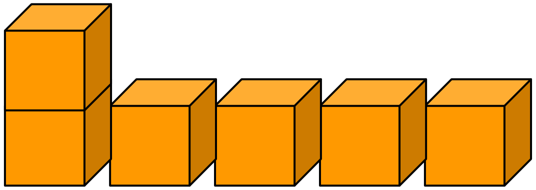
モデルの説明（続き）

トップリング

臨界値に達したら砂山は崩れ、となりの格子に砂を落とす。

雪崩

トップリングが連鎖的に発生する現象



モデルの説明（続き）

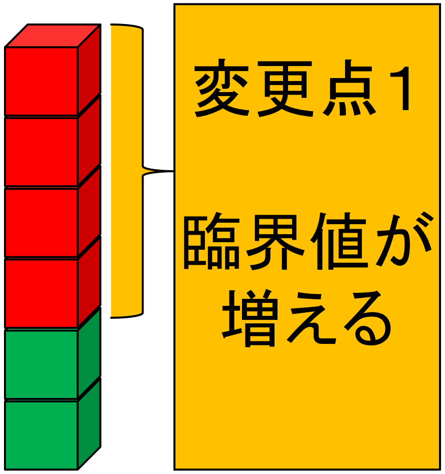
変更を加えた砂山モデル

変更点

1、格子上の粒子数の臨界値

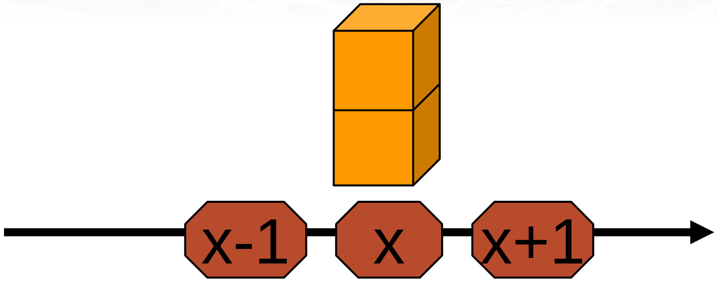
$z_c = 2 + \alpha$　　　α：定数

2、トップリングのルール



モデルの説明（続き）

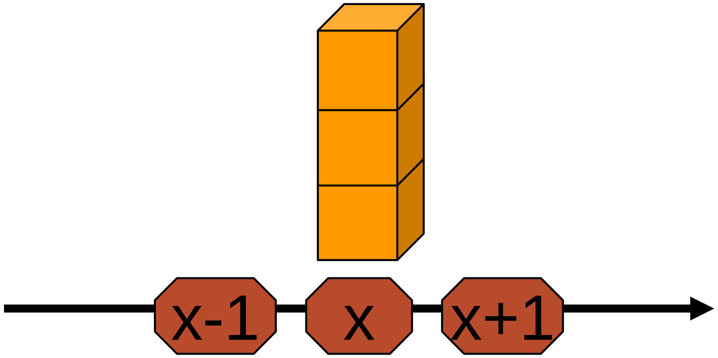
変更点２
L側に崩れる量



α＝0の場合

隣接行列

$$\Delta = 2\delta_{x,y} - \delta_{x,y-1} - \delta_{x,y+1}$$
$$\underline{+\alpha(\delta_{x,y} - \delta_{x,y-1})}$$



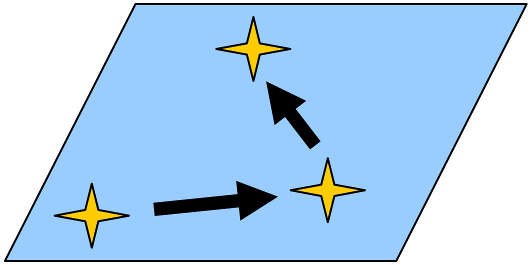
α＝1の場合

定義した系に対して粒子を上から落としていき
粒子がどのように拡散していくのかを見る。
（x+1=y）

モデルの説明（続き）

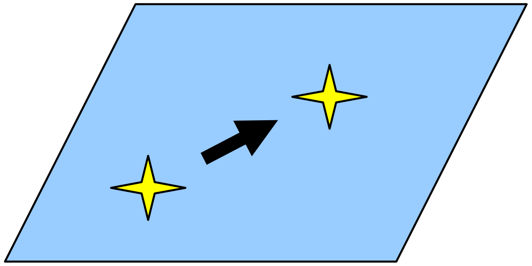
定常状態であるとき、1つ1つの格子点で

粒子の流入＝粒子の流出



粒子の流入 $= \delta_{x,z} + \sum_{y \neq z} G(x,y)\Delta(y,z)$

粒子の流出 $= \sum_{z} G(x,z)\Delta(z,z)$



G(x,y):トップリングが起こる割合
（プロパゲータ）

これをまとめると

$$\sum_{y} G(x,y)\{\Delta(y,z) + \nabla(y,z)\} = \delta_{x,z}$$ (式1)

（但し∇(y,z)＝δy,z－δy,z-1とした。）

プロパゲータの導出

行列P、Q

$$P(x,n)=\sqrt{\frac{2}{L+1}}(\alpha+1)^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{xn\pi}{L+1})$$

$$Q(n,x)=\sqrt{\frac{2}{L+1}}(\alpha+1)^{\frac{-x}{2}}\sin(\frac{xn\pi}{L+1})$$

性質　PQ=QP=E（単位行列）

これを

$$\sum_y G(x,y)\{\Delta(y,z)+\nabla(y,z)\}=\delta_{x,z}$$ （式1）

に作用させると

プロパゲータG(x,y)の具体的な形が得られる。

Ref:

T Tsuchiya and M Katori,

“Exact results for directed Abelian sasndpile models”,

J.Phys,A:Math.Gen.32(1999) 1629-1641

プロパゲータの導出（続き）

異方的な砂山モデルのプロパゲータ

$$G(x,y)=\frac{2}{L+1}\sum_{n=1}^{L}\frac{(1+\alpha)^{\frac{y-x}{2}}\sin(\frac{xn}{L+1}\pi)\sin(\frac{ny}{L+1}\pi)}{(2+\alpha)-2\sqrt{\alpha+1}\cos(\frac{n}{L+1}\pi)}$$

●比較

等方的な砂山モデルのプロパゲータ

$$G(x,y)=\frac{2}{L+1}\sum_{n=1}^{L}\frac{\sin(\frac{xn}{L+1}\pi)\sin(\frac{ny}{L+1}\pi)}{2-2\cos(\frac{n}{L+1}\pi)}$$

砂輸送の式

定常状態において砂が端（x=1）からもう一端（x=L）に到達する砂を運ぶ割合（輸送率）λ

$$\lambda(\alpha, L) = (1+\alpha)\times G(1,L)$$

（輸送率）＝(一回のトップリングで（x＝L）側に崩れる砂の数）
×（プロパゲータGの（1、L）成分）

砂輸送の式（続き）

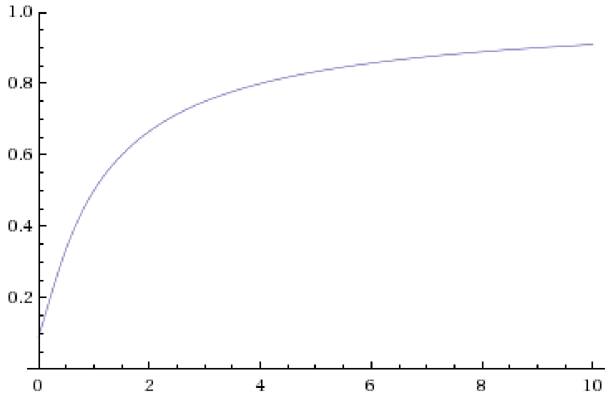
砂を運ぶ割合 λ は流れの偏り α というパラメータによって決定される。

このパラメータに対する依存性を調べる！

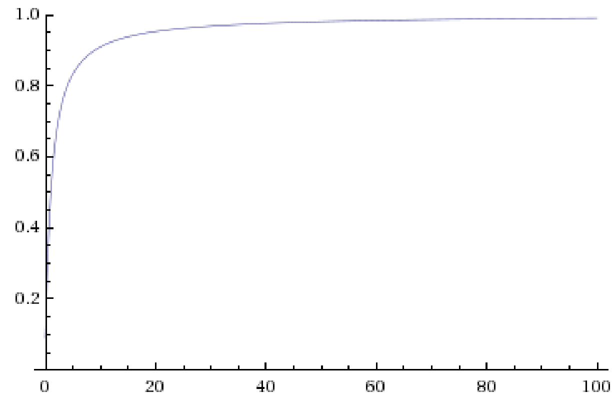
結果

α依存性

	α=(0~10) L=10の場合	



	α=(0~100) L=10の場合	



αを変化させると効率は1に近づいていくが１以上にはならない。

※またαが増えると安定配置の数が増えるのですぐには効率は上がらない。

まとめ

- 砂の輸送率 λ

$$\lambda(\alpha, L) = (1+\alpha)\times G(1, L)$$

- α を大きくすると、砂を入れたら途中で止まりにくくなり、端から端に届くようになる

考察

- プロパゲータの導出
  →複素ゲージ変換orL次元の固有値問題

- L依存性の解析
  →Lが増えることで和の項が増えていくのをどうするのか（L→∞の極限？）

$$\lambda(\alpha, L) = (1+\alpha) \times G(1, L)$$