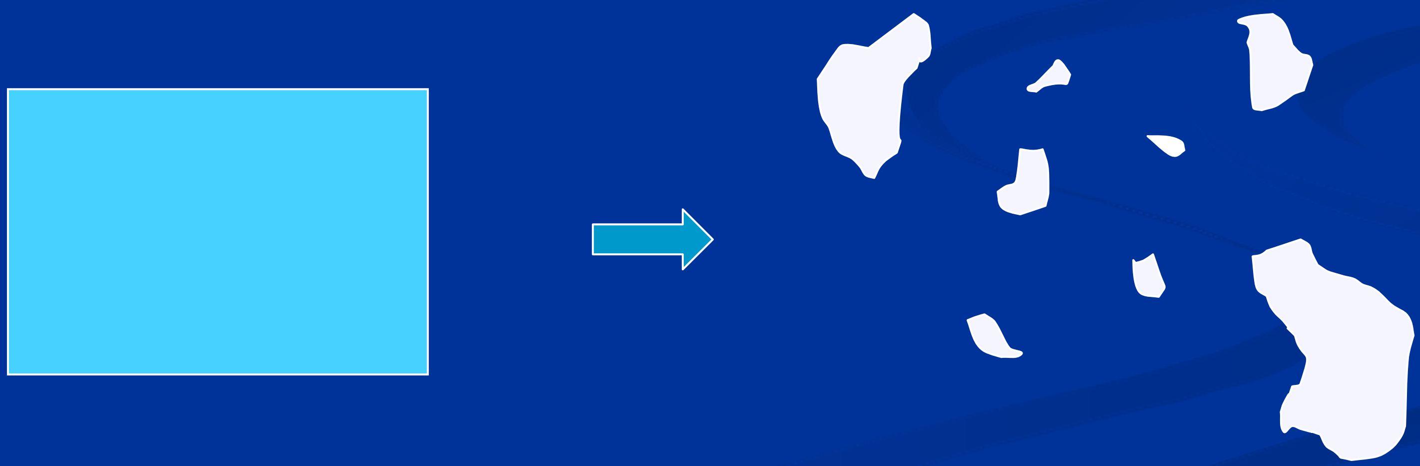
ランダムウォークの再帰時間分布と破壊点分布

物理学科　４年１組
西久保　直輝

目次

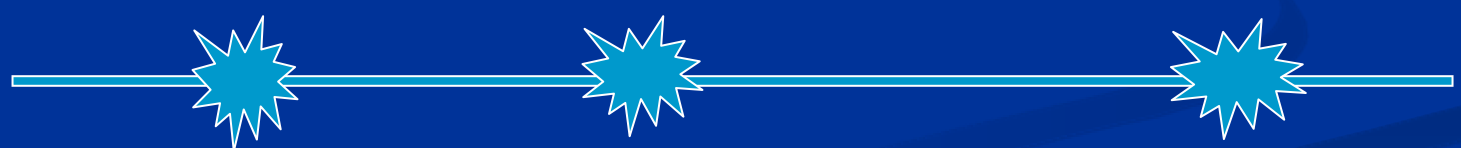
1.はじめに
1-1.破壊現象とは？

物質を破壊するということは一般に秩序が失われるイメージがあるが、その現象から統計的な法則が得られることが知られている。



1-2.どのような破壊を考えるか？

一次元の長さ1の棒をどのように壊すかということを基本として考える。０～１の一様乱数を用いて様々な方法で点を発生させ、その点を破壊点とする。乱数の発生の仕方を変えることで様々なモデルができる。破壊点と破壊点の間隔を破片とし、その大きさの分布（累積分布）を調べる。



1-3.すでにわかっていること

数々の実験から、破壊のサイズ分布のグラフはべき乗の式に従うことが知られている。破壊のメカニズムは未だに解明されていないが、分布の形がべき乗となる破壊の仕方をみつけることで、理論的なアプローチが可能となるかもしれない。

2.破壊のモデルの紹介とシミュレーションの結果

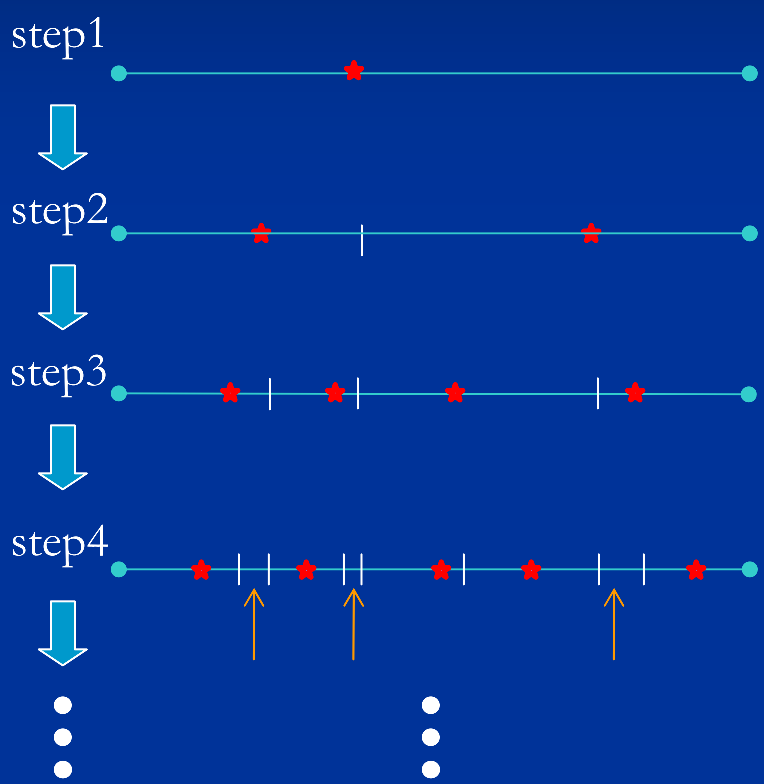
1. cascade モデル

- まずランダムに一つ破壊点を生成する。
- 次のステップで破片ごとにランダムに破壊点を1つ生成する。
- 以下それを繰り返し、破片がある短さxthに達した時点で、その破片は2度と割れないものとする。

2. R.W モデル

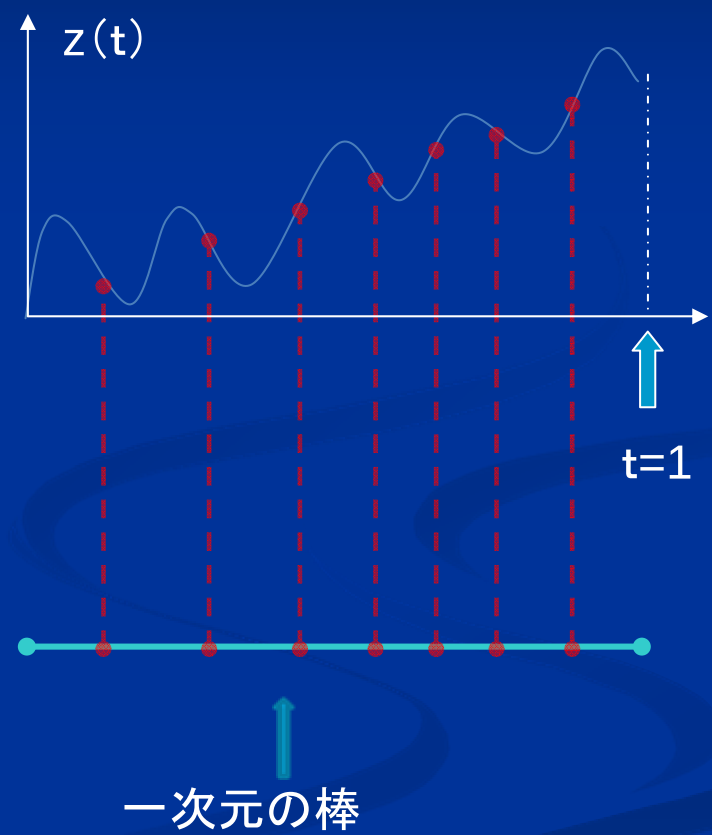
- 時刻t=0で位置z=0から出発し、1/2の確率で正か負の方向に進むランダムウォークを考える。
- 始点と終点を結んだ直線と交わる時刻を破壊点と見立てる。

cascade モデル



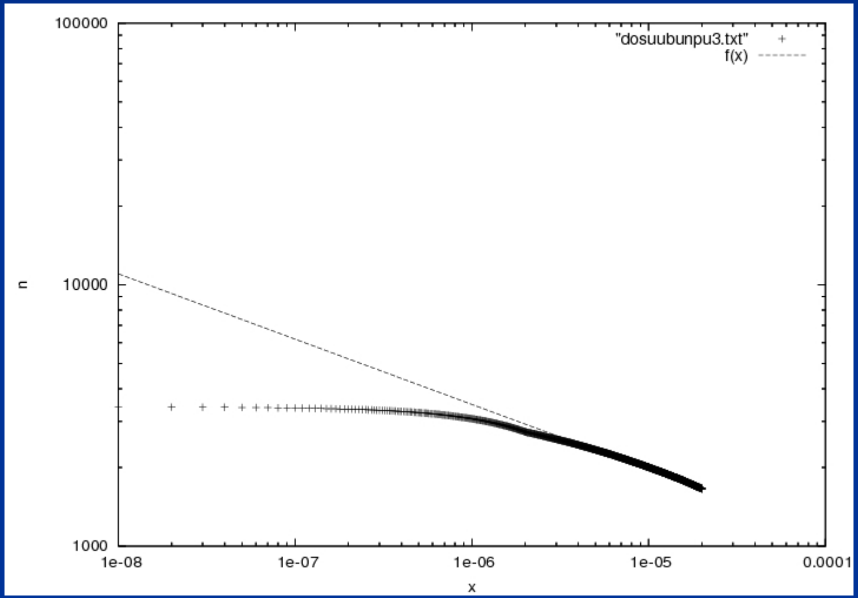
↑の個所はxth以下の長さの破片

R.W モデル



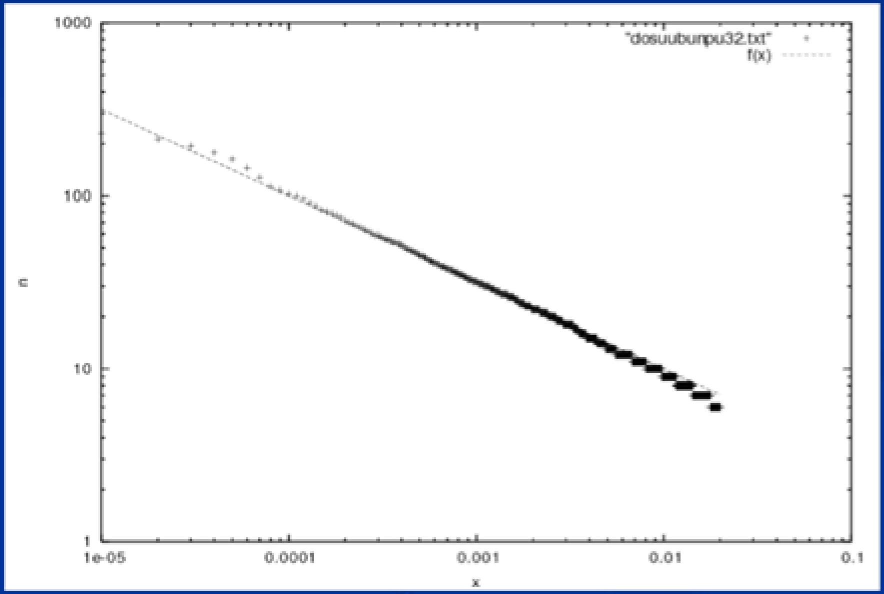
結果

cascade モデル



- STEP数11
- xth＝ 2×10^(-6)

R.W モデル



- 時間の刻み幅1/30000
- STEP数30000

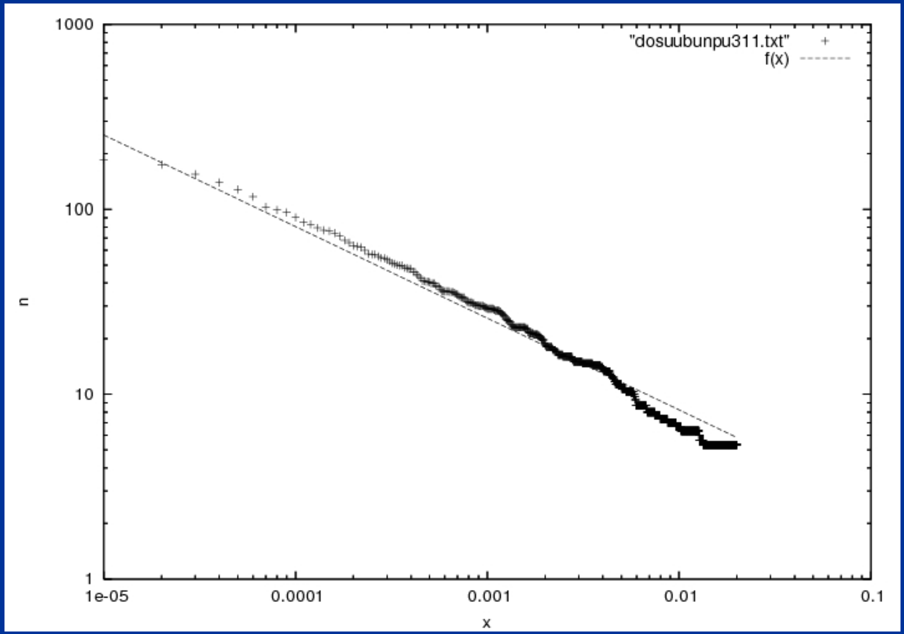
- **cascade モデル**

直線は $f(x) \propto x^{-0.25}$ のグラフである。上の結果は一応直線には近いものの、きれいなべき関数を再現しているとは言い難い。改善策としては、それぞれの破片で生成される破壊点の数をランダムにする、破片が割れるか割れないかを確率で指定するなどが考えられる。

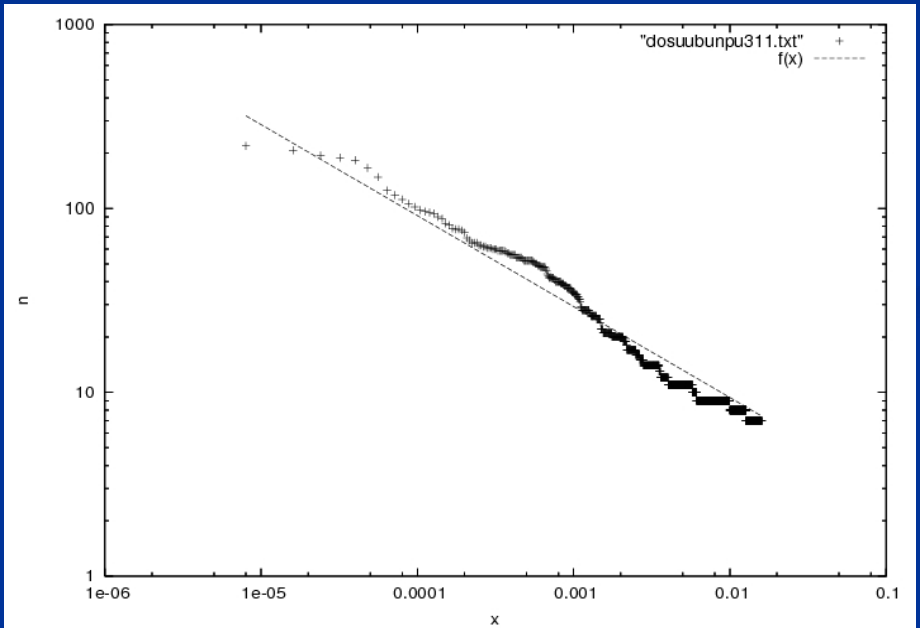
- R.W モデル

グラフが直線に近いことから、分布はべき乗の形になっていることがわかる。直線は の $f(x) \propto x^{-0.50}$ グラフである。破壊のモデルとして妥当である可能性が芽生えた。

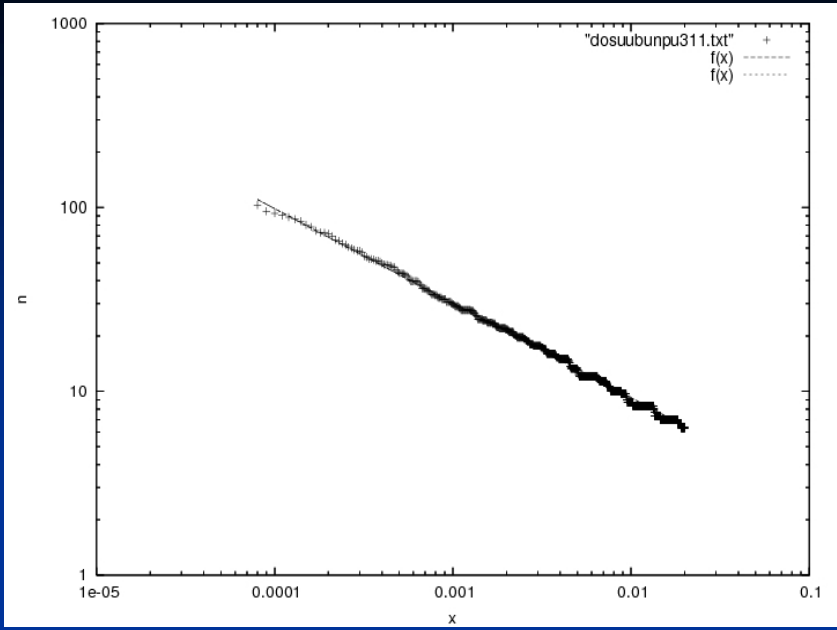
また、R・Wモデルにおいて、終点の位置z(t=Tmax)を固定して同様のシミュレーションを行ったところ、以下の結果が得られた。



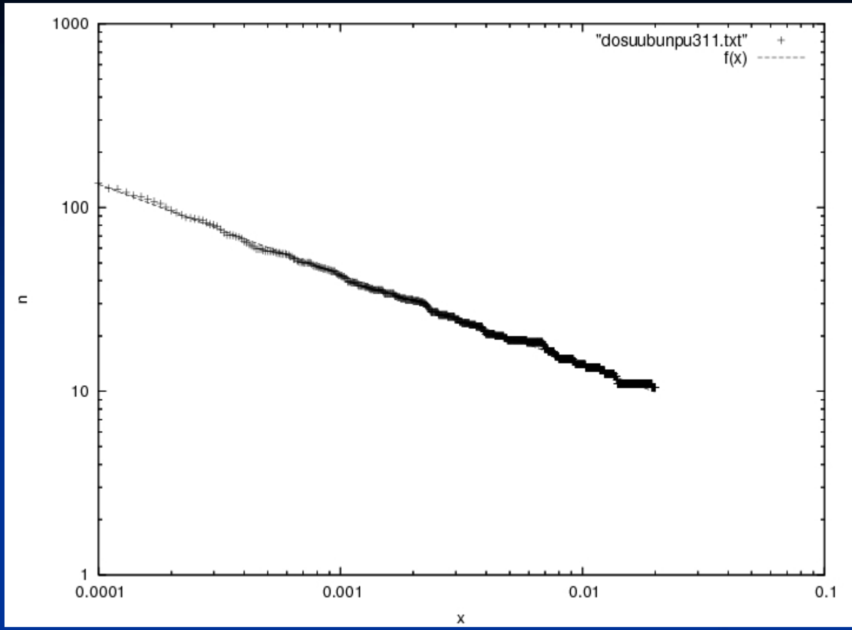
z(t=Tmax)=0



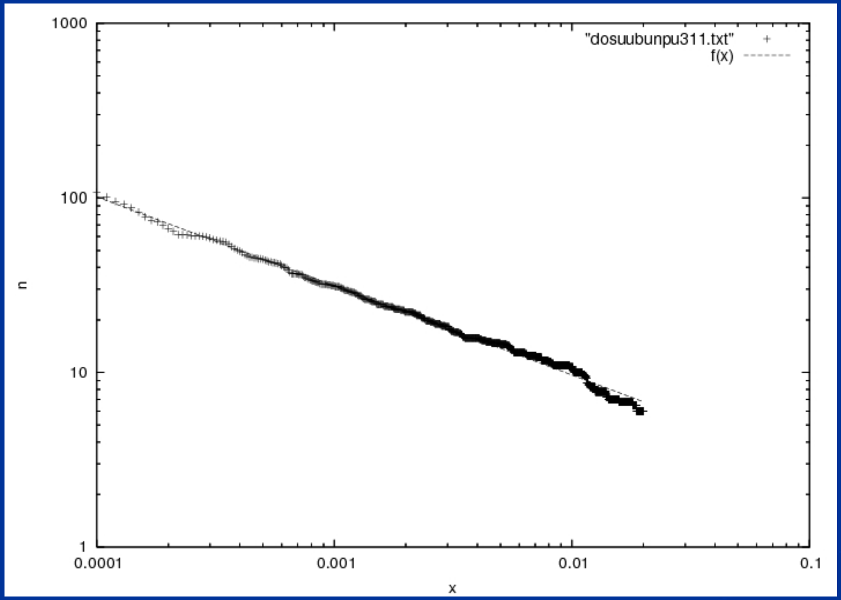
z(t=Tmax)=600



z(t=Tmax)=6000



z(t=Tmax)=12000



z(t=Tmax)=21000

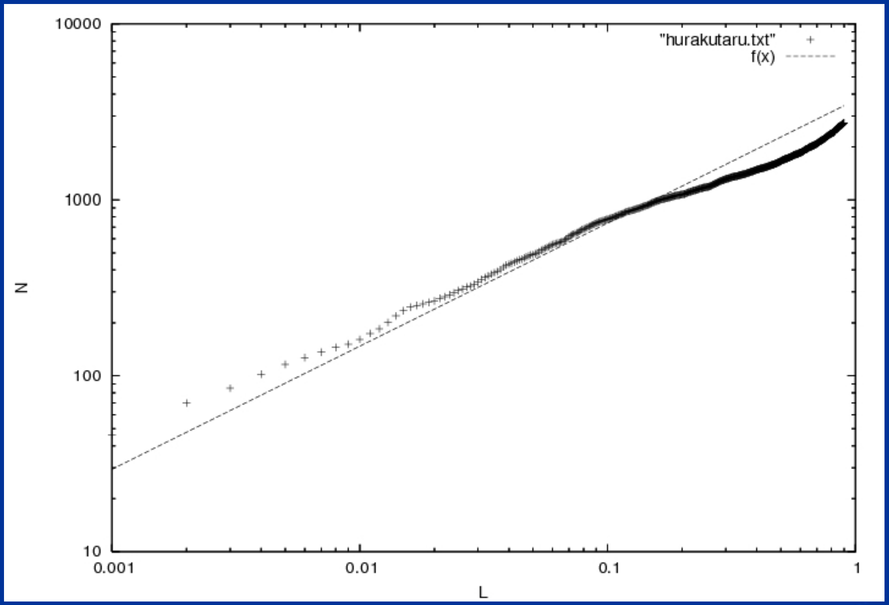
固定した終端位置z(t=Tmax)と傾き（べき指数）の大きさβの関係は以下のようになった。

z(t=Tmax)	傾きβ
0	0.50
600	0.49
6000	0.51
12000	0.51
21000	0.51

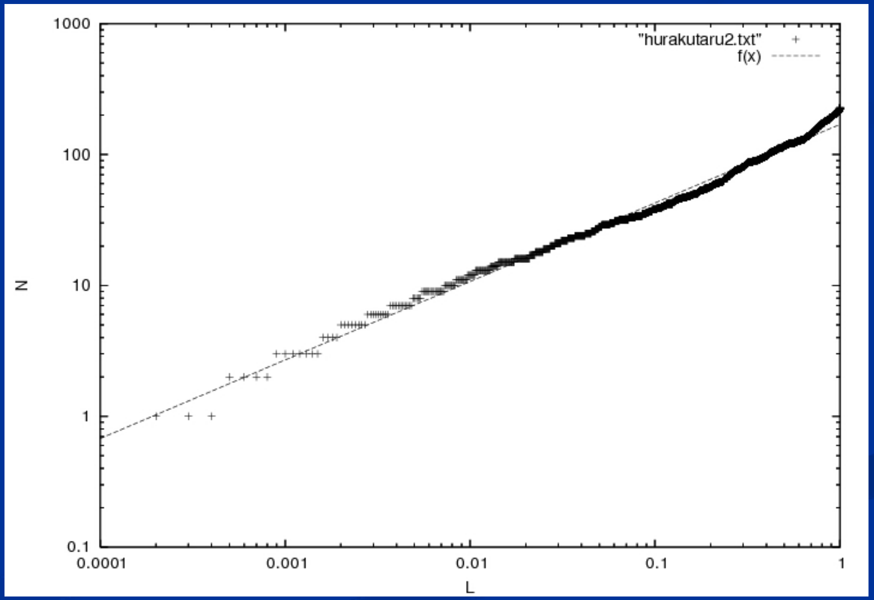
以上の結果から、βのz(t=Tmax)に対する依存性は低いと言える。また、グラフの直線性もほとんど失われていない。

3.フラクタル次元

破壊点の分布の性質を調べるため，視野拡大法を用いて、２つのモデルの破壊点分布におけるフラクタル次元をシミュレーションにより求めた結果，以下の結果が得られた.



Cascade　モデル



R･W　モデル

Cascadeモデルのグラフの直線が $f(L) \propto L^{0.70}$ 、R・Wモデルのグラフの直線が $f(L) \propto L^{0.63}$ となっている(それぞれのフラクタル次元が0.63、0.70であるということ)。フラクタル性について見てみると、サイズ分布のグラフもそうであったが、R・Wモデルの方が、Cascadeモデルよりも綺麗な直線性を示していることがわかる。

4. 考察

フラクタル分布の直線性とサイズ分布の直線性には強い関係があると考えられる。また、R・Wモデルのサイズ分布のべき指数がおよそβ ＝0.50、フラクタル次元がα ＝0.63、また、Cascadeモデルのサイズ分布のべき指数がβ ＝0.25、フラクタル次元がα ＝0.71であることから，α ＋β は1に近い数字をとると思われる。

今後の課題

帰納的に予測をたてるにしてもサンプル数があまりに少ない。より多くのべき乗則に従うモデルに対して、同様の解析を行う必要がある。

参考文献

- フラクタル物理（Ⅰ）ー基礎編ー　中央大学教授　松下　貢　著
- フラクタル物理（Ⅱ）ー応用編ー　中央大学教授　松下　貢　著
- "How Do Thin Glass Rods Break? "　M･Matsushita and K･Sumida