TASEPのシミュレーションによる

境界線の振る舞い

2009年8月22日

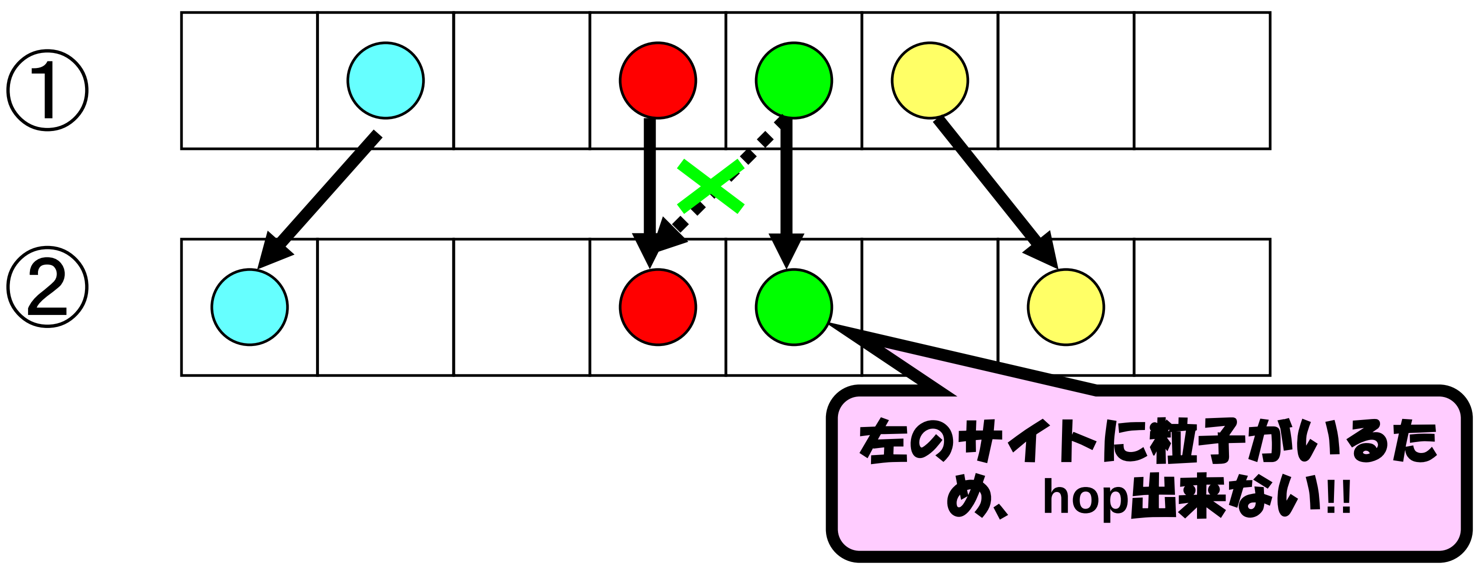
シャレードイン志賀

佐藤　真喜子

1、ASEPとは何か？

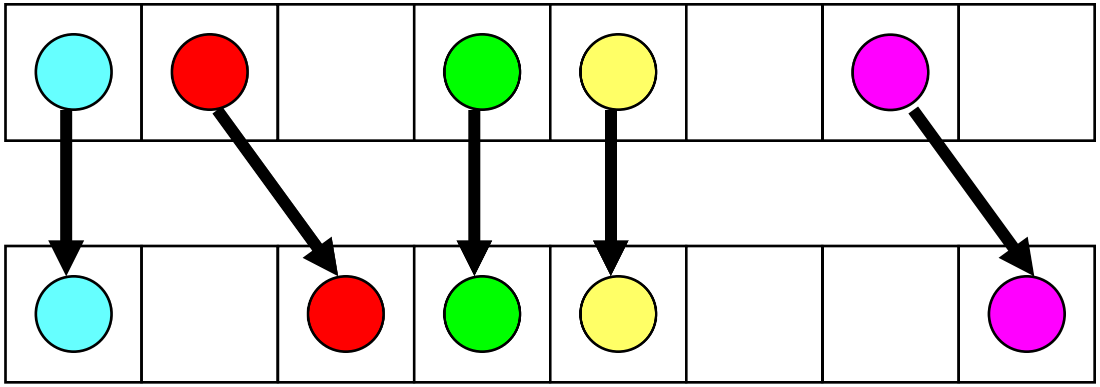
①1次元格子上に非対称なhopをする粒子がたくさんいる模型を考える。

②ある粒子がhopする際、そのサイトが他の粒子で埋められていた場合はhopできないものとする。



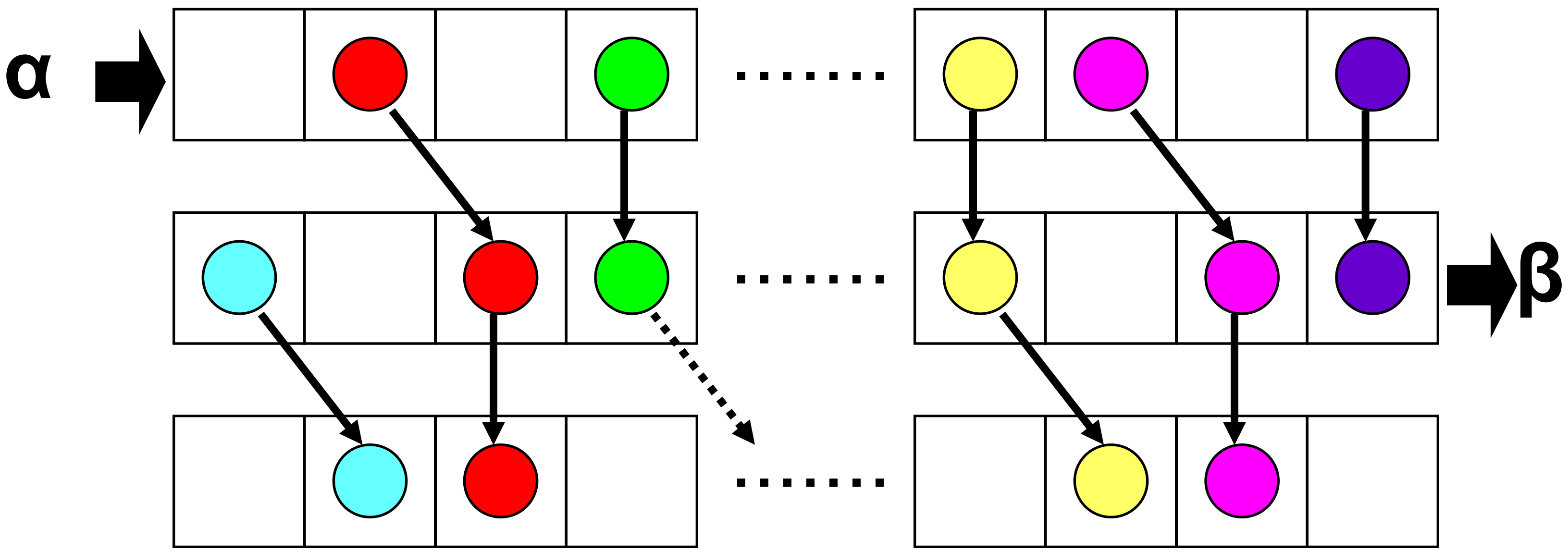
　右へのhooping rate(P_R)と、左へのhopping rate(P_L)を変えることで、いろいろなモデルが考えられる。

　今回は、右にしかhopしない場合（P_R＝１、P_L＝０）を考え、交通渋滞に応用したモデル（TASEP）について、シュミレーションをした。



２、TASEPの渋滞への応用

　有限の長さ(＝L)のサイトを考え、左の境界と右の境界での粒子の出入りのrateを、それぞれα･βとおく。
　サイトの中の粒子はqの確率でhopするTASEPの動きをする。



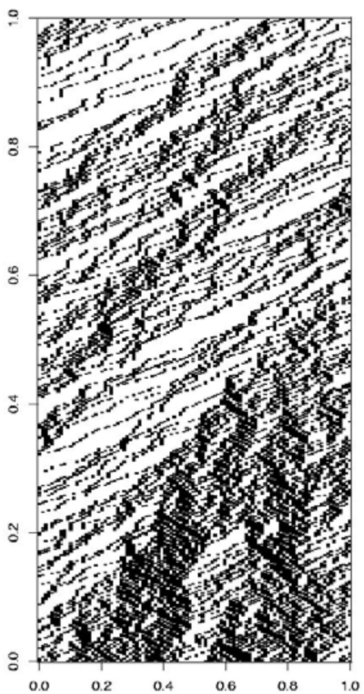
α、βの値を変えることで、交通渋滞の現象のシュミレーションをすることができる。横軸をサイト数、縦軸をステップ数とする。

時間とともにそれぞれ粒子が流れたり、渋滞していたりする様子がわかる。

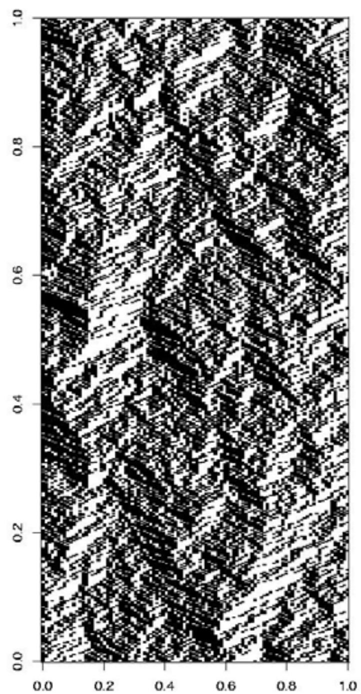
（サイト数L=100、ステップ数T=500）

＊100回ランダムにサイトを選んで進めるかを判定して1ステップと定義した。

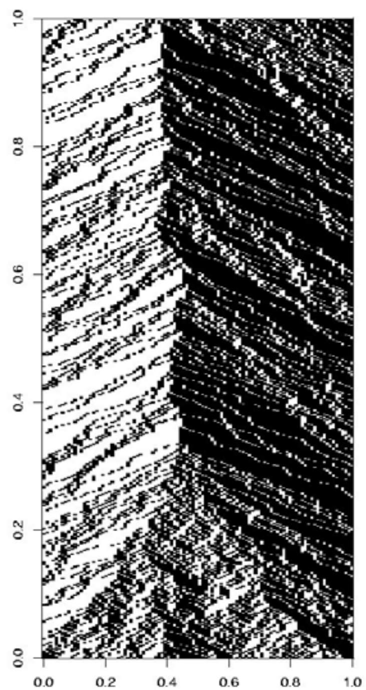
(1)α=0.2、β=1.0



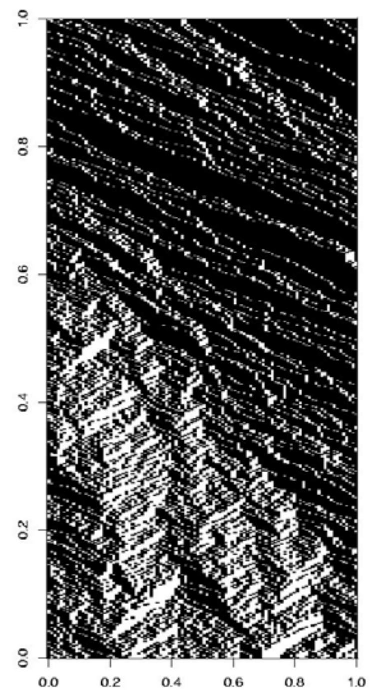
(2) α=1.0、β=1.0



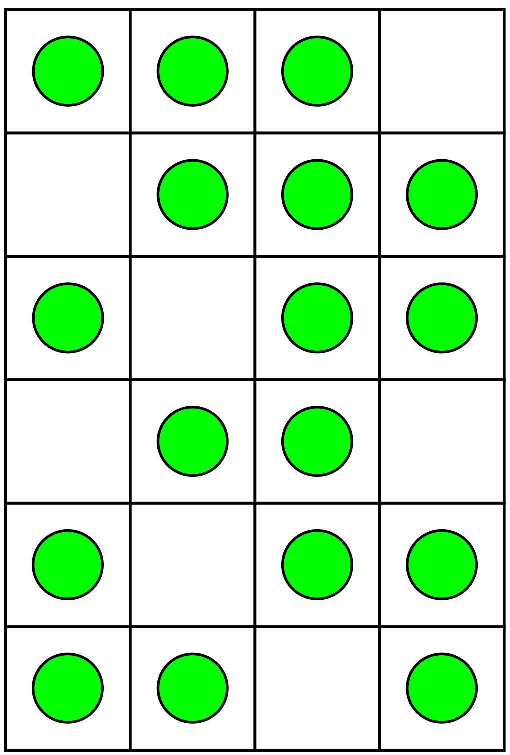
(3)α=0.2、β=0.2



(4)α=1.0、β=0.2



＊この相図は、1ステップごとに、粒子があるところを1、ないところを0で表した配列をもとめ、1を黒、0を白で表している。



1 1 1 0

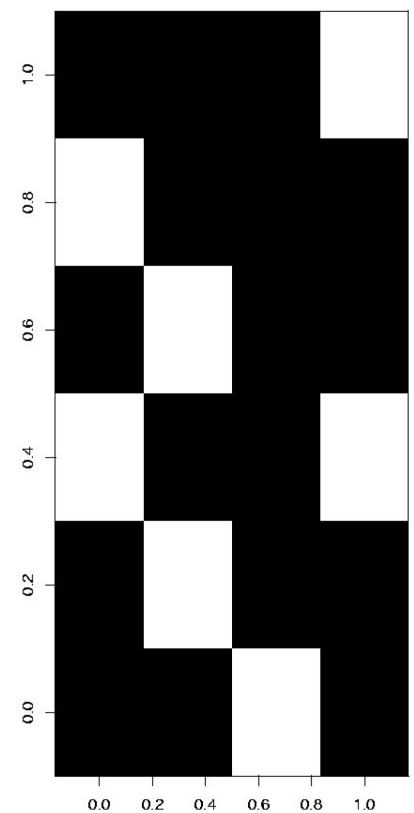
0 1 1 1

1 0 1 1

0 1 1 0

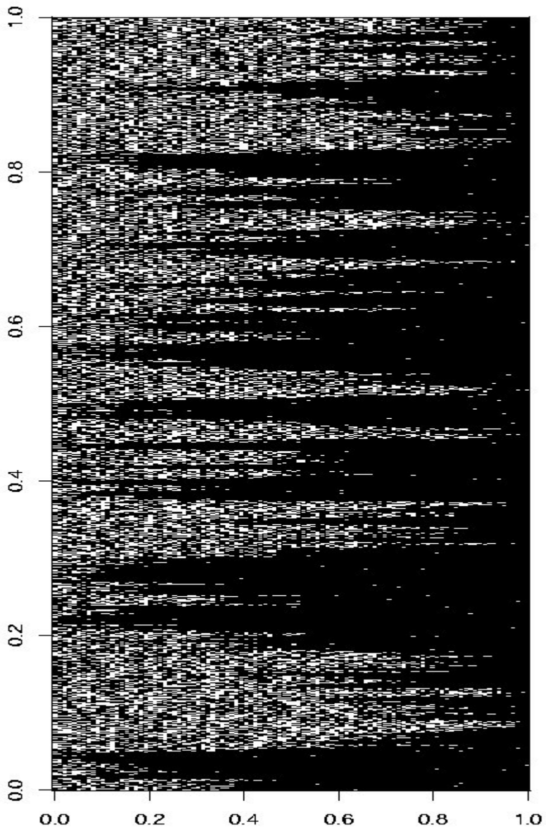
1 0 1 1

1 1 0 1



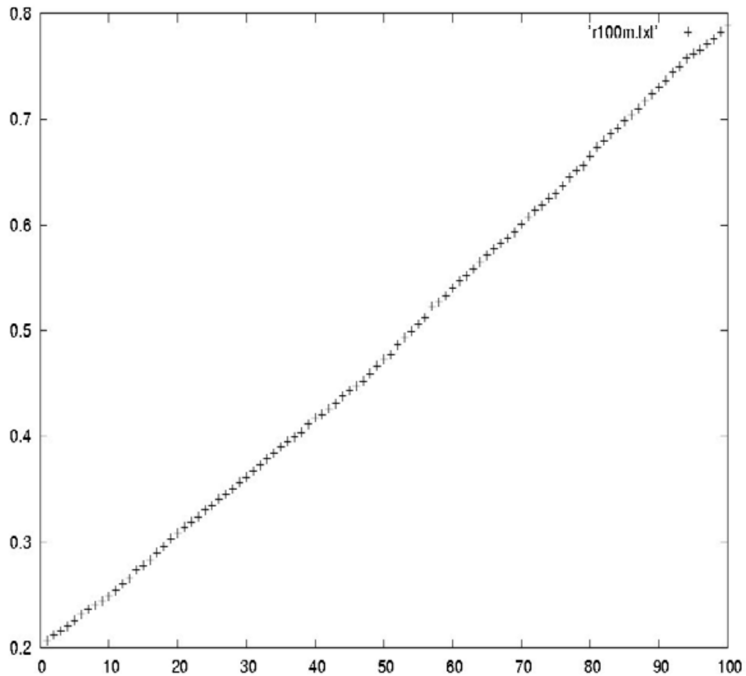
(3)のα=β=0.2の相図を見ると、渋滞しているところとそうでないところの境界があることがわかる。

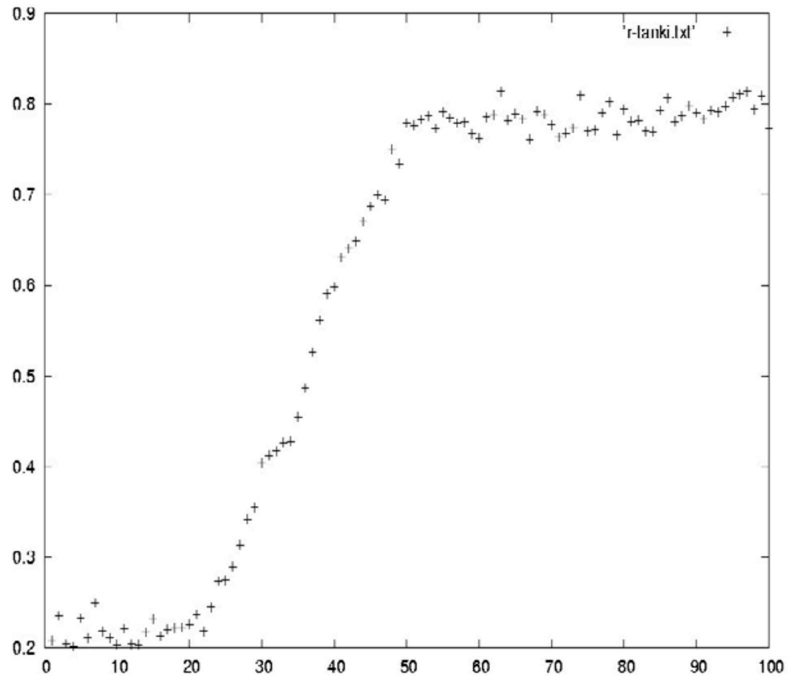
ステップ数を大きくしてみると、その境界線が大きく揺らいでいることがわかった。



サイト数100
ステップ数300000
とした。
この図は100ステップずつ飛ばした結果をプロットしたものである。
渋滞しているところ（黒の濃い部分）と、渋滞していないところ（黒の薄い部分）が境界であり、
大きく揺らいでいる。

また、短いステップと長いステップでは、サイトごとの密度のグラフも大きく変わることがわかっている。





サイト数100、ステップ数300000　　サイト数100、ステップ数2000

ステップ数が多いと境界部分が揺らぐため、右の密度のグラフの急な部分がたくさん重なったものの平均として直線のグラフになる。

４、境界線の抽出(2)

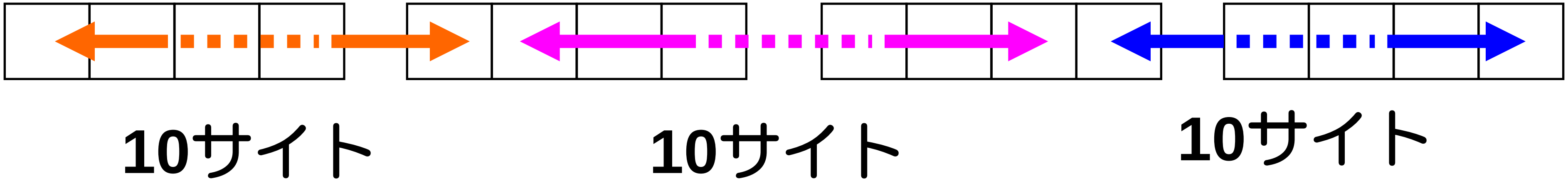
　長期ステップで、かつ1ステップごとの境界を
できるだけ正確にもとめるため、プログラミングを
作ることを考えた。

① 境界の前後で粒子の密度に大きな差がある

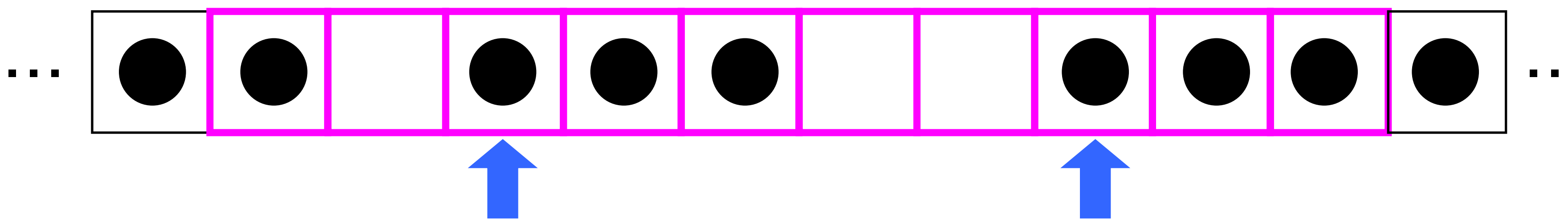
② あるステップから次のステップへ移行するとき、
境界の位置は大きくは動かない

③ クラスターの最後尾（一番左側）に境界がある

① まず、境界がはっきり現れるステップ(T =200)から始めた。

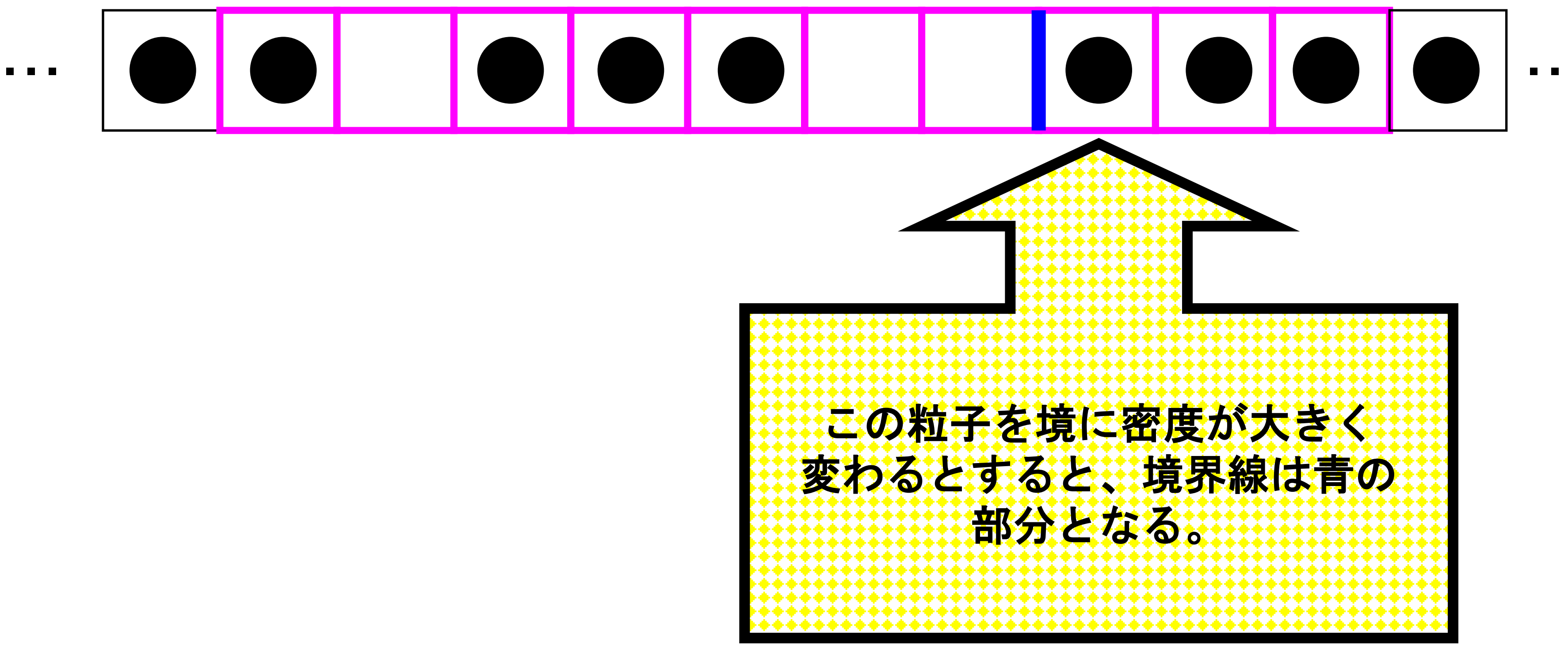


■の部分に境界があるとすると、■と■の部分の粒子の密度には大きな違いがある。両側の10サイトの密度を求め、差が一番大きくなる■の10サイトの場所を特定した。

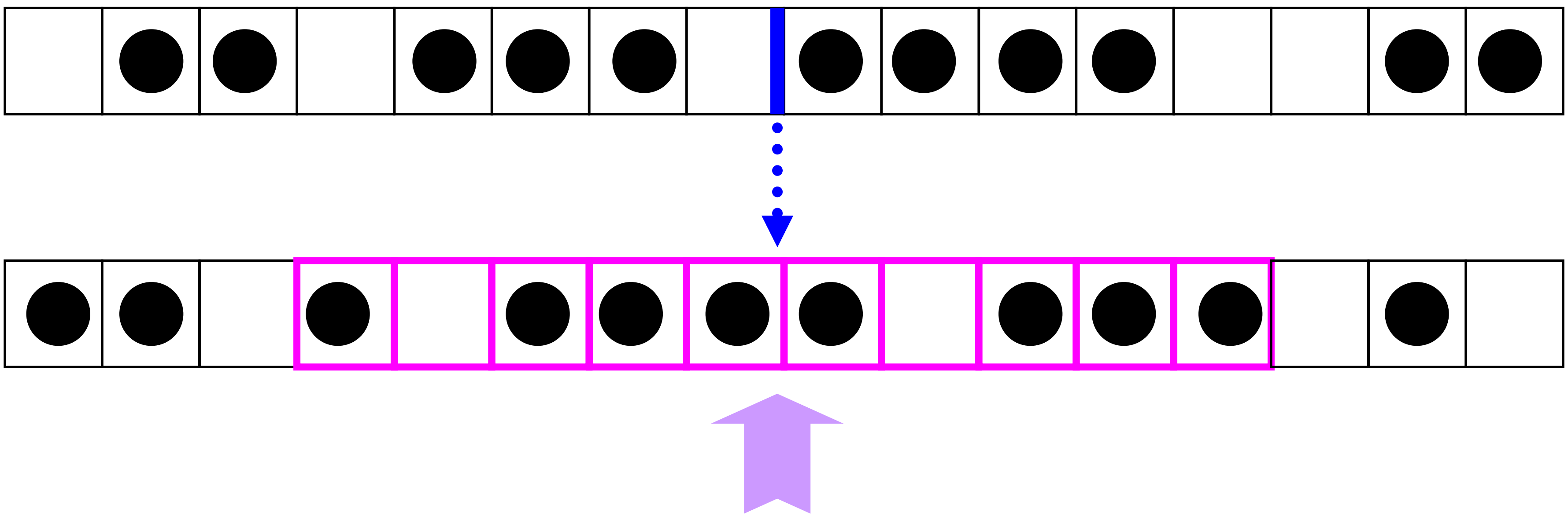


境界はクラスターの最後尾にあると考えたため、特定された10サイトの中でクラスターの最後尾になっている粒子に注目した。

最後尾の粒子から右へ10サイトの粒子密度と左へ10サイトの粒子密度を比べ、密度の差の一番大きくなるときの粒子の入ったサイトの壁を境界とした。



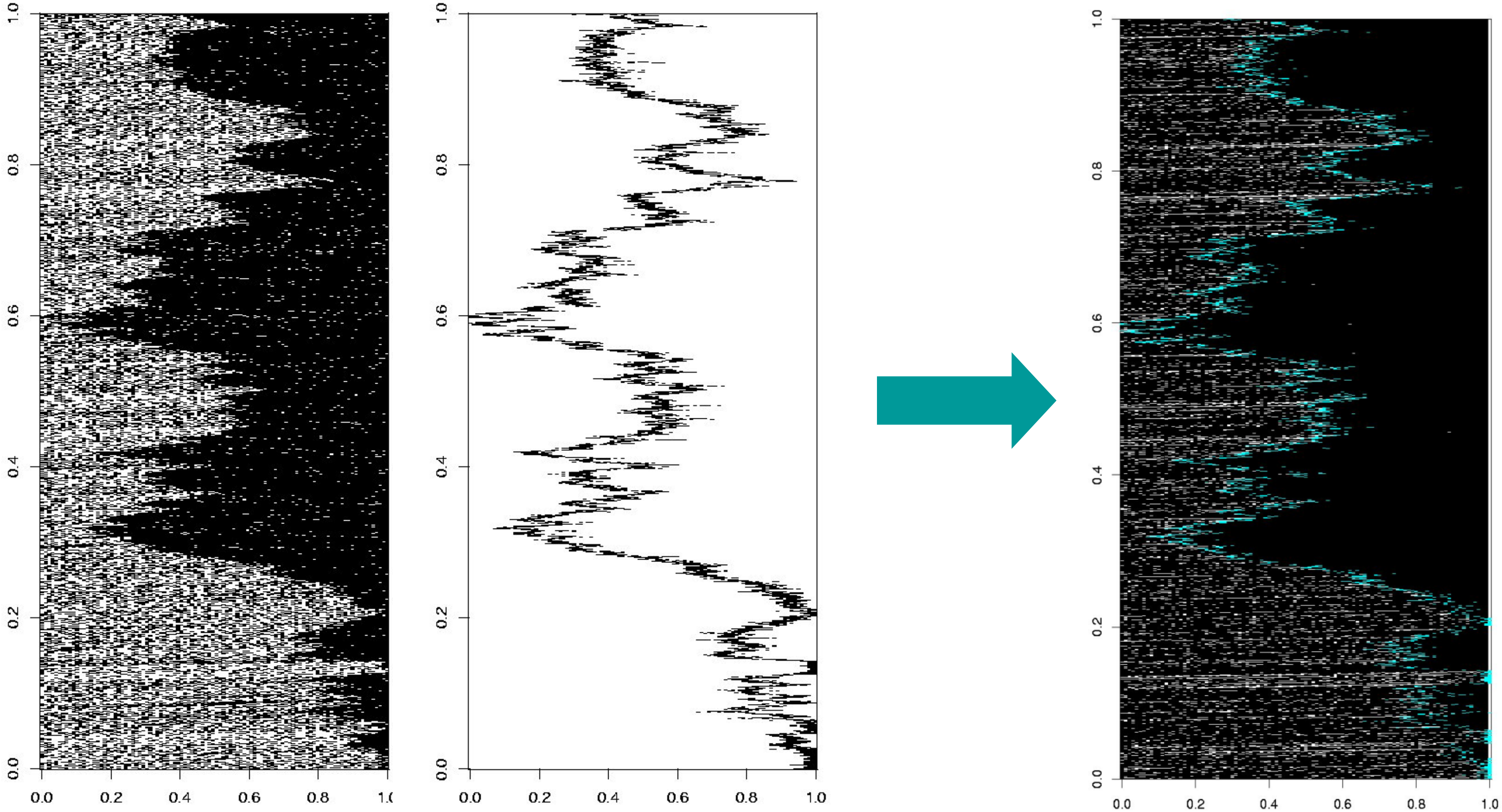
はじめのステップ(T=200)での境界が求められたら、次のステップはその左右5サイトずつの中でクラスターの最後尾となる粒子に注目して境界を求めていく。



この10サイトの中から境界を選ぶ。

※　境界が左端や右端にあるときは、密度を比べることができなくなってしまうため、左端の場合クラスターの最後尾から右へ10サイトの中に粒子が6個以上、右端の場合クラスターの最後尾から左側10サイトの中に空のサイトが6個以上で境界とした。

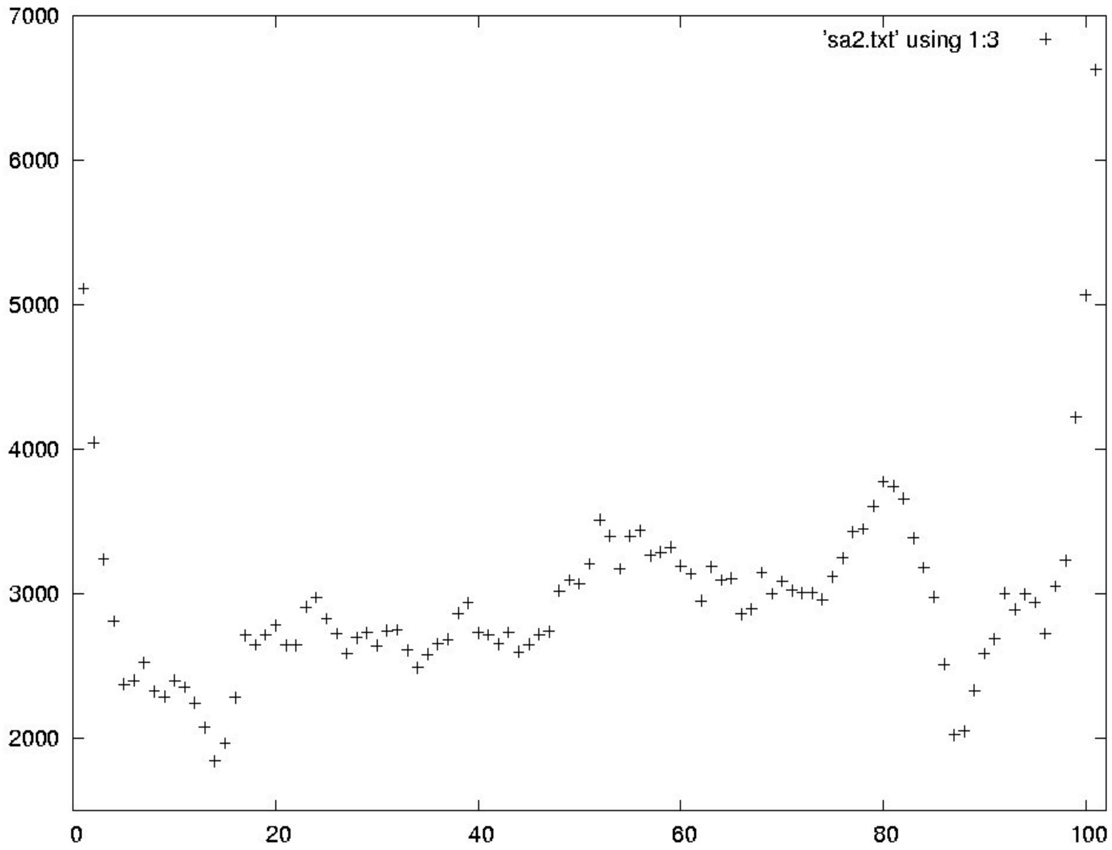
　以上のルールからプログラムを作り100サイト300000ステップの境界を求めた。



プログラミングを使って境界線を抽出すると上の図のようになる。水色の線を境に、黒い部分とそうでない部分に分かれていることがわかる。

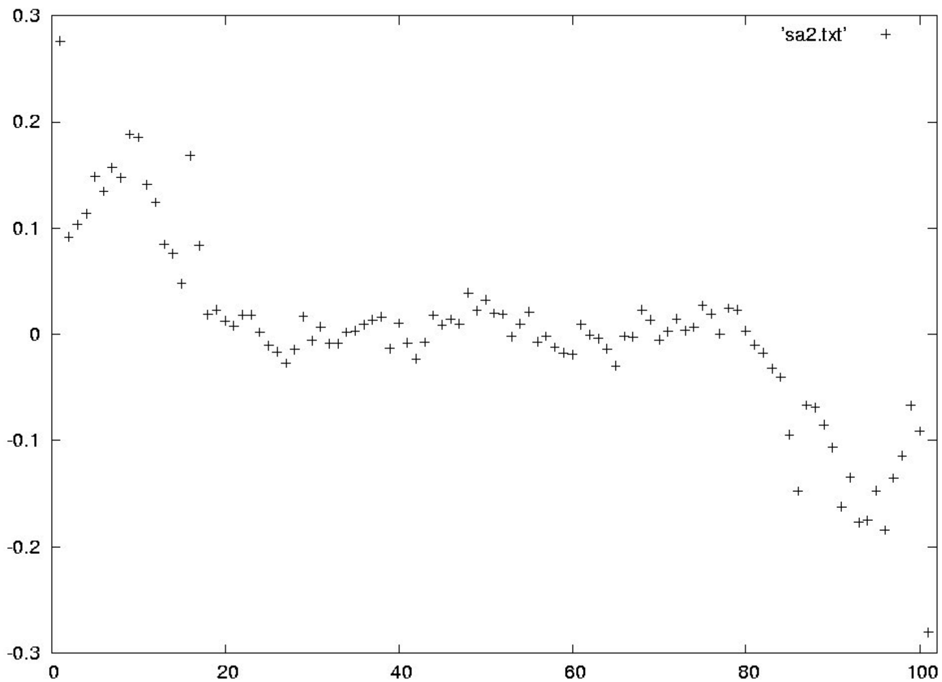
5、境界の頻度と性質

境界の場所と頻度をグラフにすると、下のグラフのようになった。



このグラフから、境界は中心付近ではなく、右端または左端にあることの方が多いことがわかる。

次に、境界の場所の動き方について調べてみた。あるステップから次のステップへ行くとき境界の場所が右へいく場合は+1、左へ行く場合は-1、動かない場合は0として平均をとり、右への動きやすさをグラフにした。



両端へ近づくほど、内側へ向かう動きが大きくなることがわかる。

中心付近では右へ動く比率と左へ動く比率は同じくらいである。

6、標準偏差と時間の関係

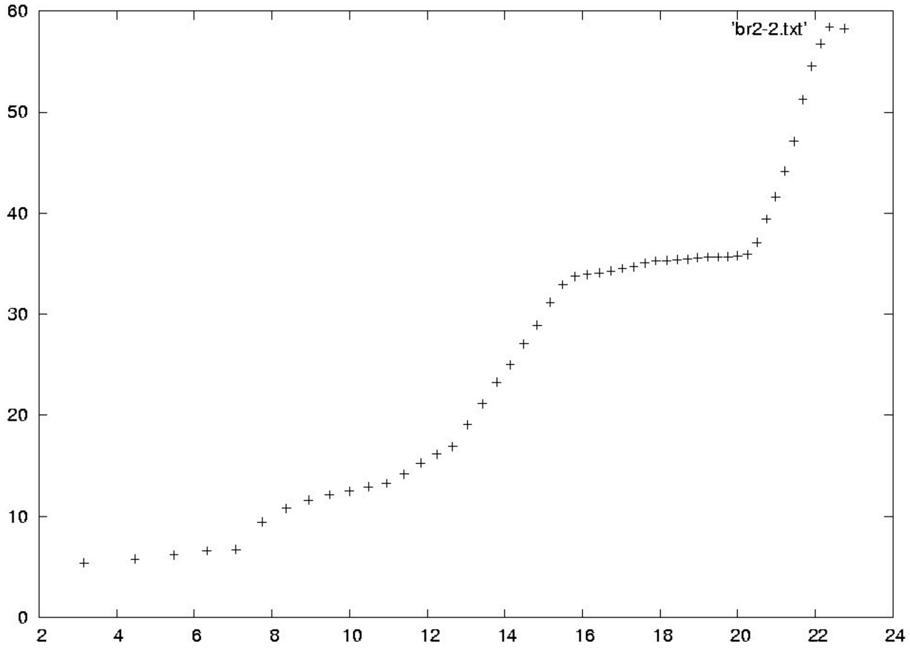
境界の動きはブラウン運動に似ている。

→標準偏差と時間との関係はどうなっているのか

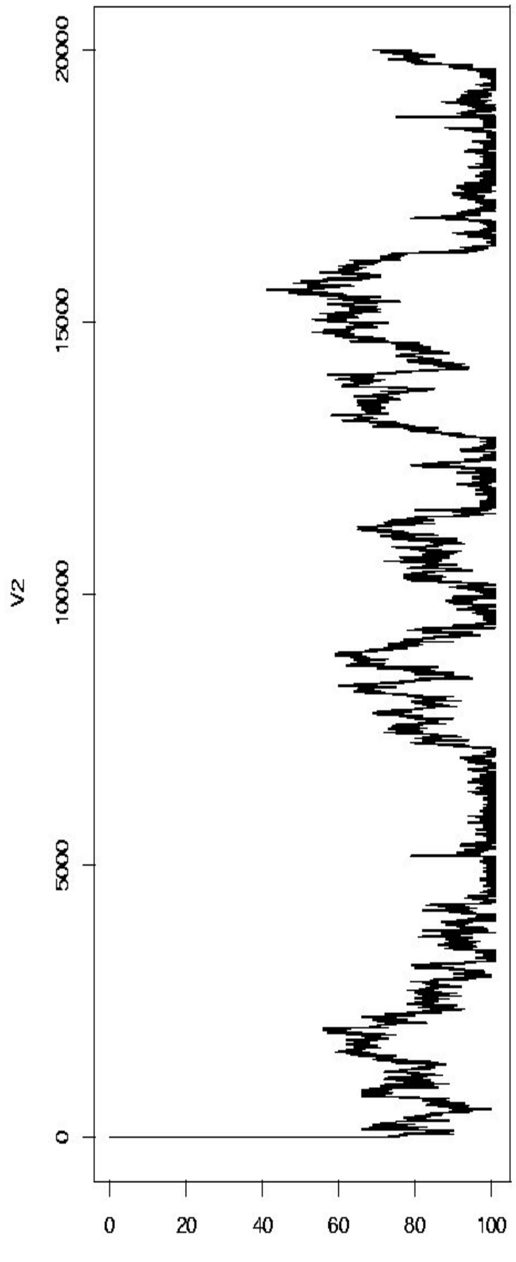
境界線の座標から分散・標準偏差とステップ数の関係を求めた。

$$\sigma^2 = \mathbf{E}\left[x^2\right] - \left(\mathbf{E}\left[x_0\right]\right)^2$$

上の式から標準偏差 σ を計算し、$\sqrt{t}$ との関係をグラフにした。



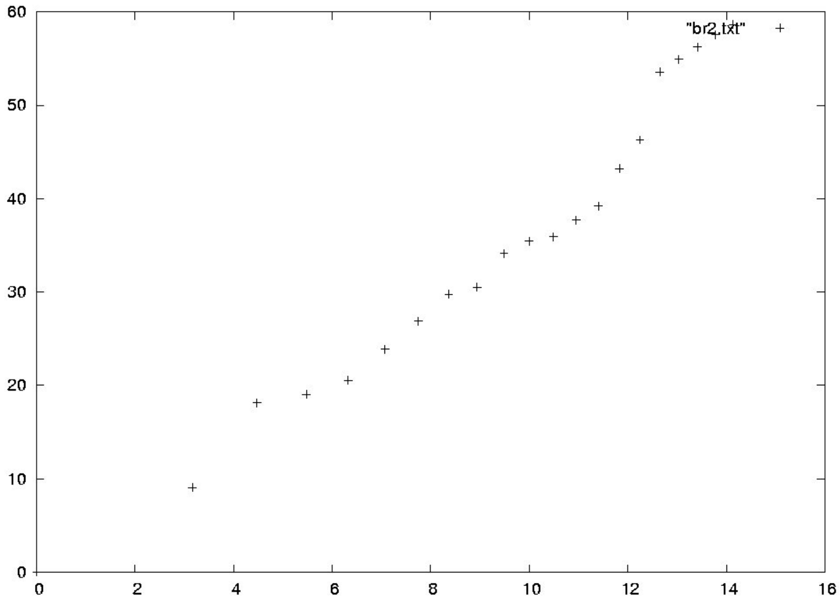
右の境界線のグラフを
1ステップずつ計算していくと、
直線のグラフではなく、途中で
折れ曲がってしまった

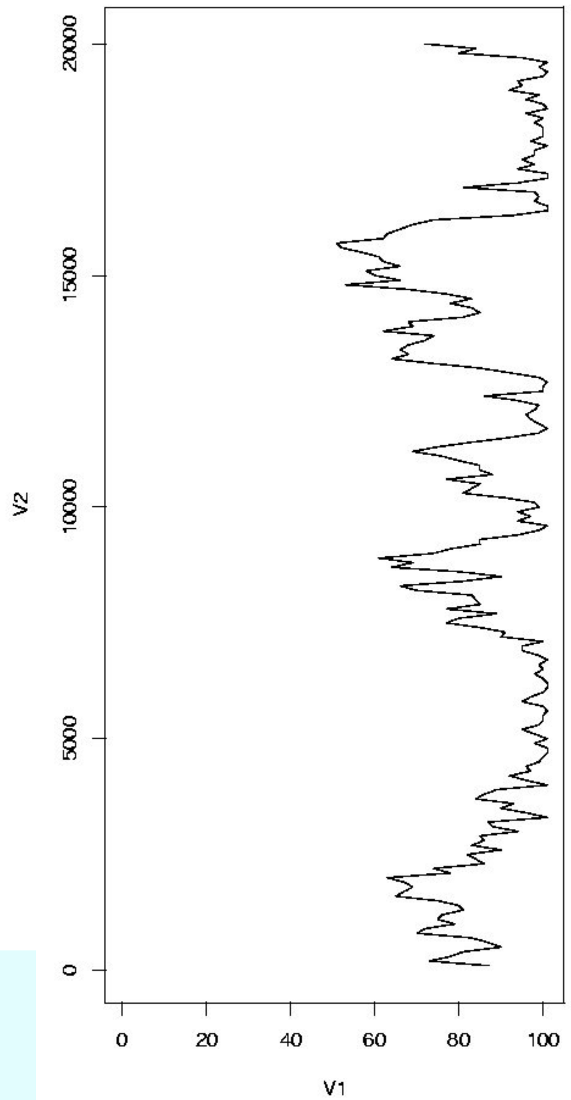


あまり細かい動きを追いすぎると、1ステップでの動きの影響が大きく出てしまうのではないか・・・

境界の動きをある程度大まかに見るために、20000ステップを100ステップごとに飛ばした境界線から、標準偏差を求めた。

20001~40000ステップ





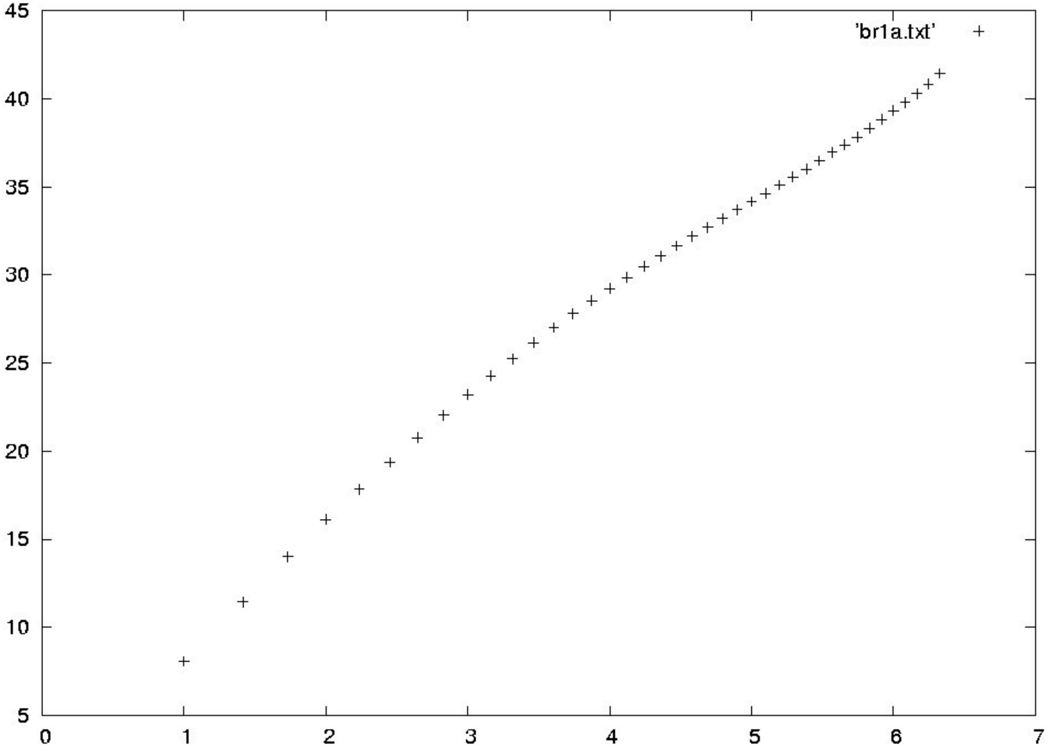
100ステップごとに飛ばして見ることで、

境界の動きが見やすくなった。

標準偏差と時間の比例関係を

見ることができた。

20000ステップごとに区切ったものを、300000ステップ分平均を取ると、やはり比例の関係を得ることができた。



7、まとめ

標準偏差と時間は比例している。

→　ブラウン運動の性質を持っている
両端へぶつかると内側へ跳ね返って
くるので反射壁ブラウン運動

サイト数を1000、5000と大きくしていくと、
両端の影響が小さくなり、標準ブラウン運動に
なるのではないかと考えられる。

砂山崩しのモデル

Ｌ×Ｌの正方格子を考え、それを空間とする。各サイトに砂の粒が積み重なっていることを考える。

1	1	3
1	1	1
1	2	1

３×３の正方格子の場合、左図のようになる。臨界値（それ以上積み重なったら雪崩が起きる数）を4と決め、砂粒をサイトに落していく。

①

1	1	4
1	1	1
1	2	1

+1

②

1	1	5
1	1	1
1	2	1

+1

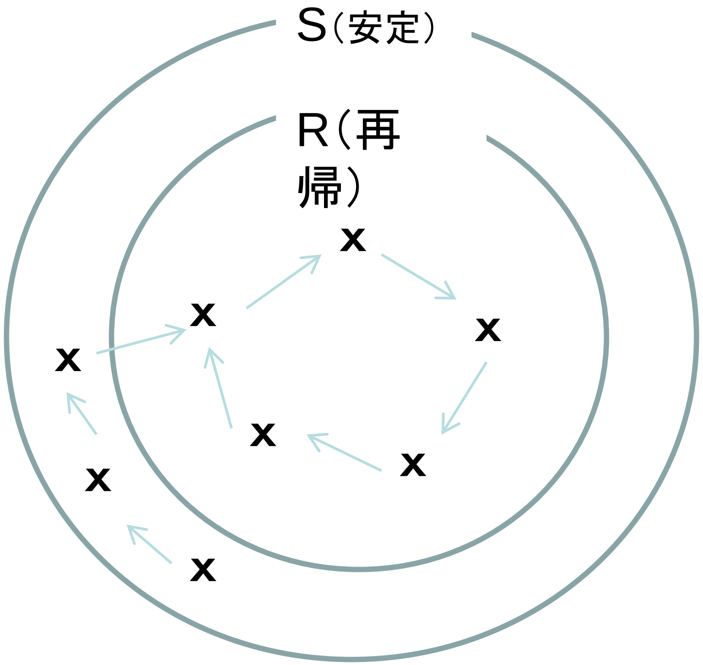
③

1	2	1
1	1	2
1	2	1

右上のサイトの砂粒の数が5になったので、topplingが起こる。（上下左右に砂粒が転げ落ちていく）

このような動きを繰り返していくと、ある決まった配置のみをくり返し、それを再帰的配置と呼ぶ。

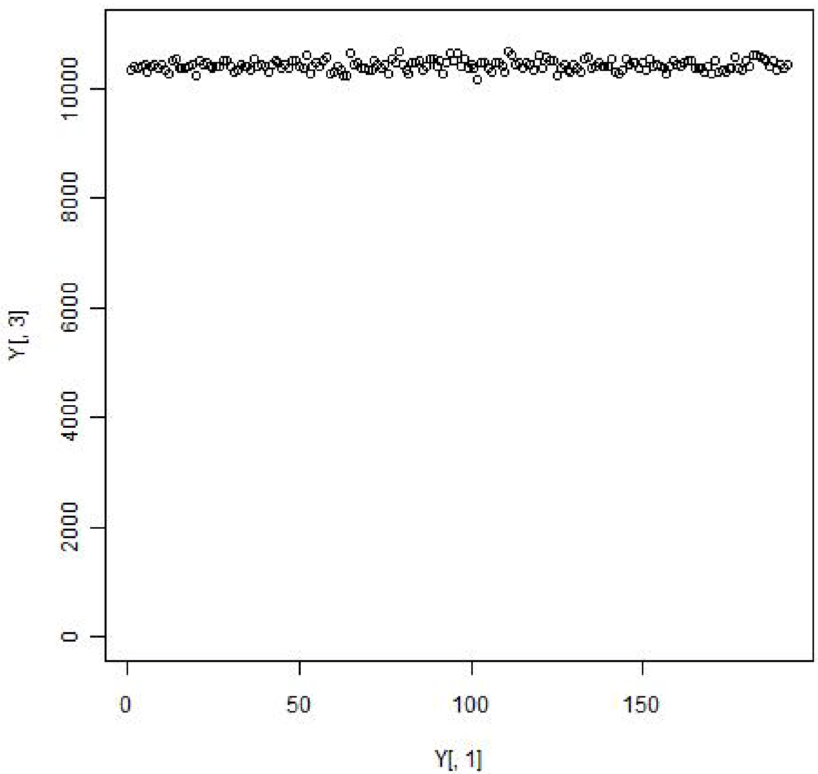
一度、再帰的配置をとると、再帰的配置のみを繰り返す。



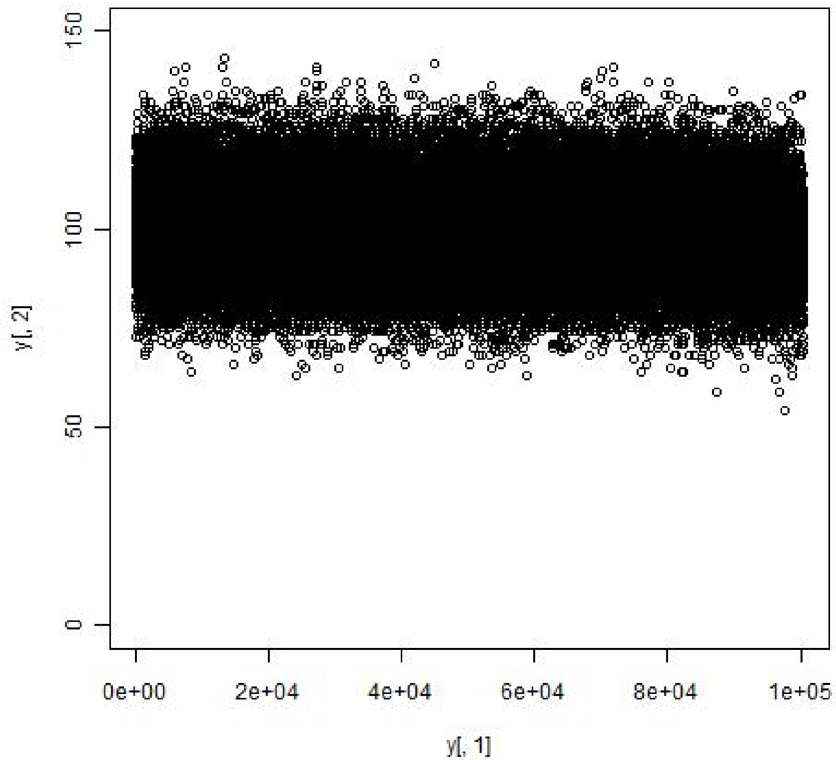
この再帰的配置の総数は、detΔで求められることがわかっている。
実際に、2×2、3×3の場合においてシミュレーションを行った。

$$\det\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

（2×2の場合）



2×2サイト



3×3サイト

どの再帰的配置も、必ずくりかえされている。
このサイトのサイズを大きくしていくと、なだれの規模が大きくなり、自己組織化臨界現象が確認される。