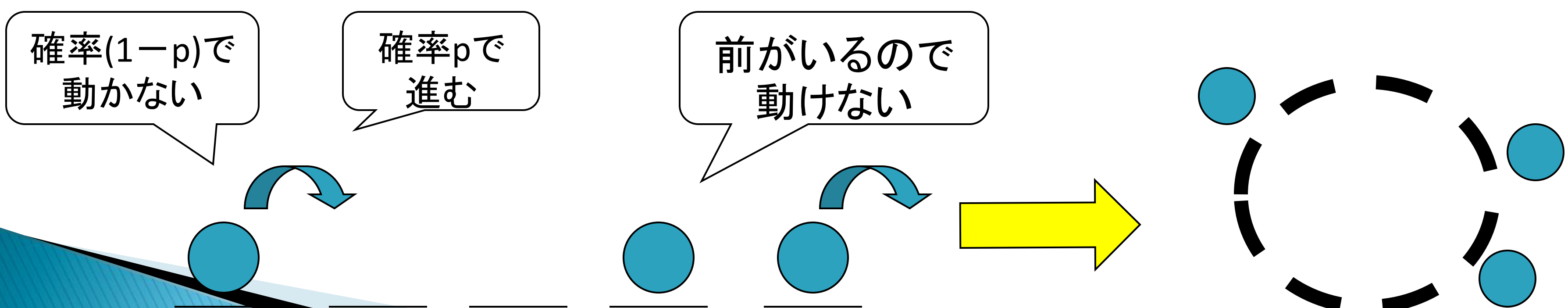
車間による相関と確率変化

中央大学理工学部物理学科
4年　多田紘樹

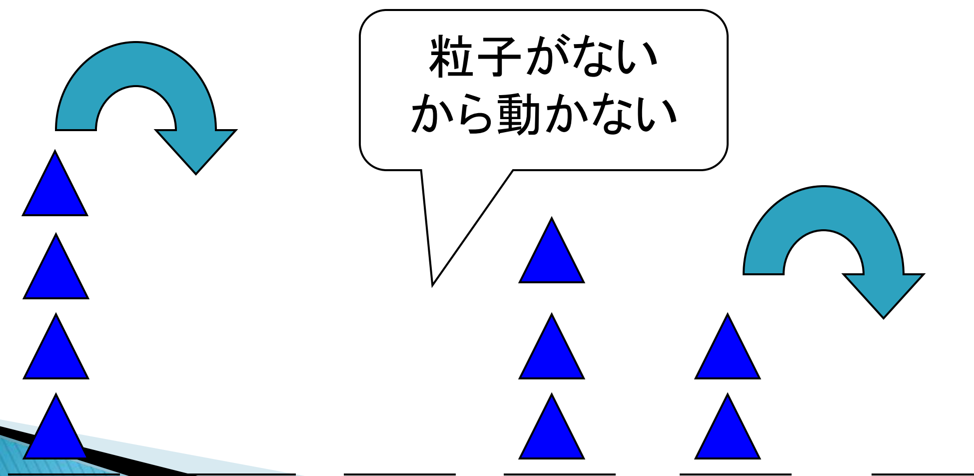
TASEP

- 1方向のみに進み1つ前に粒子があるかないかで振る舞いが変わる。
- 1つのサイトには1粒子しか入ることができず、前のサイトがあいていれば、1ステップで確率pで動く。前に粒子がいた場合は動けない。
- サイトは端まで行くと最初に戻る、円のような場合とする。



ZRP

- 車間を粒子と考える。そのため1つ前の状況に影響されない。
- 1つのサイトにいくつも粒子が入ることができ、1ステップで多くの粒子が動ける。ただし、サイトに粒子が入っていなければ、動くことはできない。



ASEPとZRPの関係

	ZRP	ASEP
サイト数	L	L+N
粒子数	N	L
粒子密度	N / L	L / (L+N)

道路の長さ

車の数

研究の目的

- ZRPに条件を課すことでASEPになる。
- ASEPにおいて車間に注目することで相関を知ることができるのではないだろうか。

①車間距離の測定

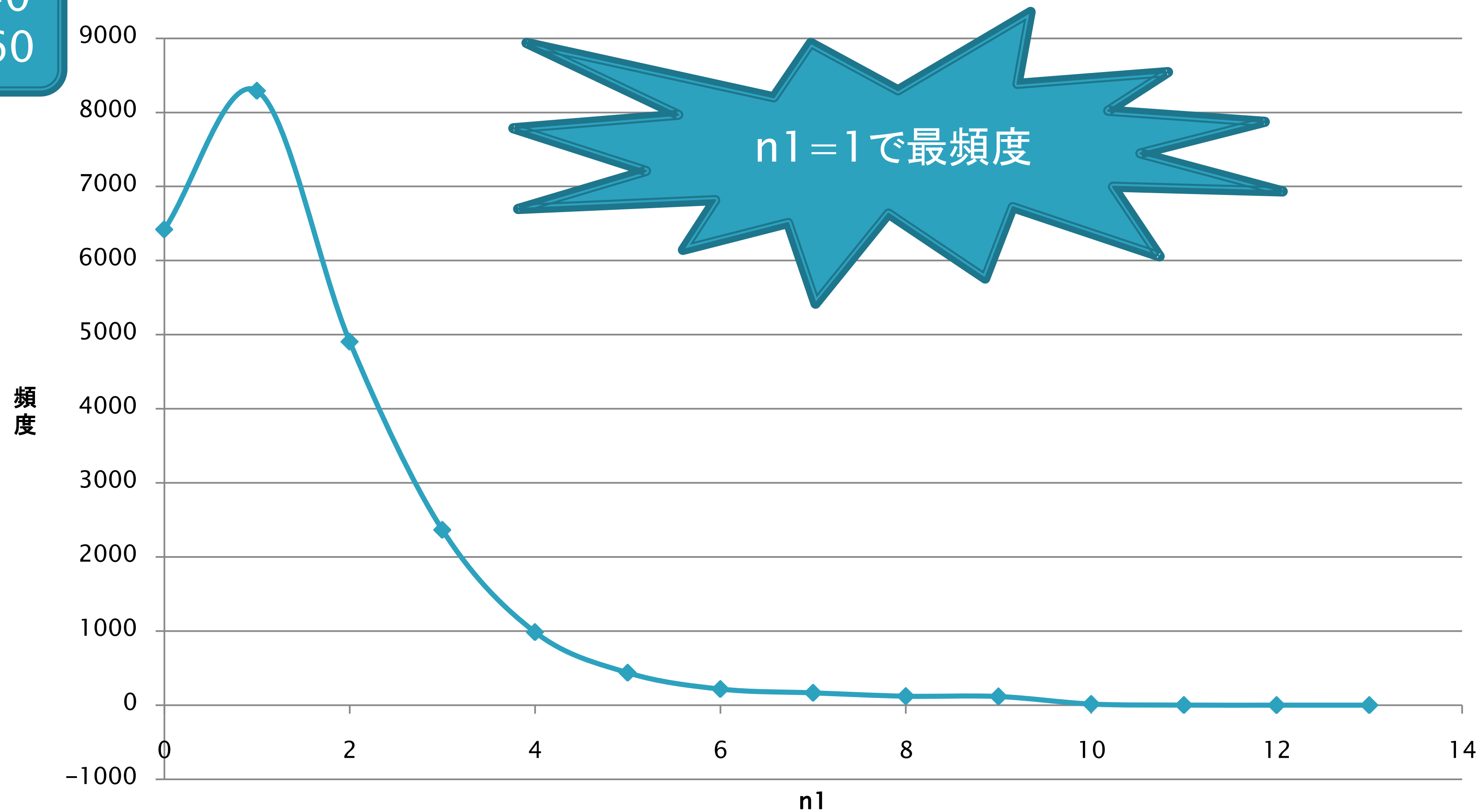
②1サイト相関関数

③平均・分散

④2サイト相関関数

車間距離の分布

L=40
N=60



1サイト相関関数

$$
\begin{aligned}
P(n_1) &= \sum_{\mathbf{n}' \in \Omega_{L-1}} p(\mathbf{n}) \\
&= \sum_{\mathbf{n}' \in \Omega_{L-1}} \frac{\prod_{l=1}^{L} f(n_l)}{Z_{L,N}} \\
&= \frac{f(n_1)}{Z_{L,N}} \sum_{\mathbf{n} \in \Omega_{L-1}} \prod_{l=2}^{L} f(n_l)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$Z_{L,N} = \sum_{\mathbf{n}\in\Omega_L} \prod_{l=1}^{L} f(n_l)$$

であるから、

$$\begin{aligned} P(n_1) &= \frac{f(n_1)}{Z_{L,N}} \sum_{\mathbf{n}\in\Omega_{L-1}} \prod_{l=2}^{L} f(n_l) \\ &= \frac{f(n_1)}{Z_{L,N}} Z_{L-1,N-n_1} \end{aligned}$$

また超幾何級数を用いて、

$$Z_{L,N} = f(0)^{L-N} f(1)^{N} (1-p)^{N-1} L {}_2F_1[1-L, 1-N, 2, \frac{1}{1-p}]$$

$$Z_{L-1,N-n_1} = f(0)^{L-1-N+n_1} f(1)^{N-n_1} (1-p)^{N-n_1-1} (L-1) {}_2F_1[-L, 1-N+n_1, 2, \frac{1}{1-p}]$$

を代入すると

$$P(n_1) = f(n_1) f(0)^{n_1-1} f(1)^{-n_1} (1-p)^{-n_1} \frac{L-1}{L} \frac{{}_2F_1[2-L, 1-N+n_1, 2, \frac{1}{1-p}]}{{}_2F_1[1-L, 1-N, 2, \frac{1}{1-p}]}$$

さらに

$$f(n)=\frac{f(1)^n}{f(0)^{n-1}}(1-p)^{n-1} \qquad (n\geq 2)$$

より、

（1） n＝0

$$P(0)=\frac{L-1}{L}\frac{{}_2F_1[2-L,1-N,2,\frac{1}{1-p}]}{{}_2F_1[1-L,1-N,2,\frac{1}{1-p}]}$$

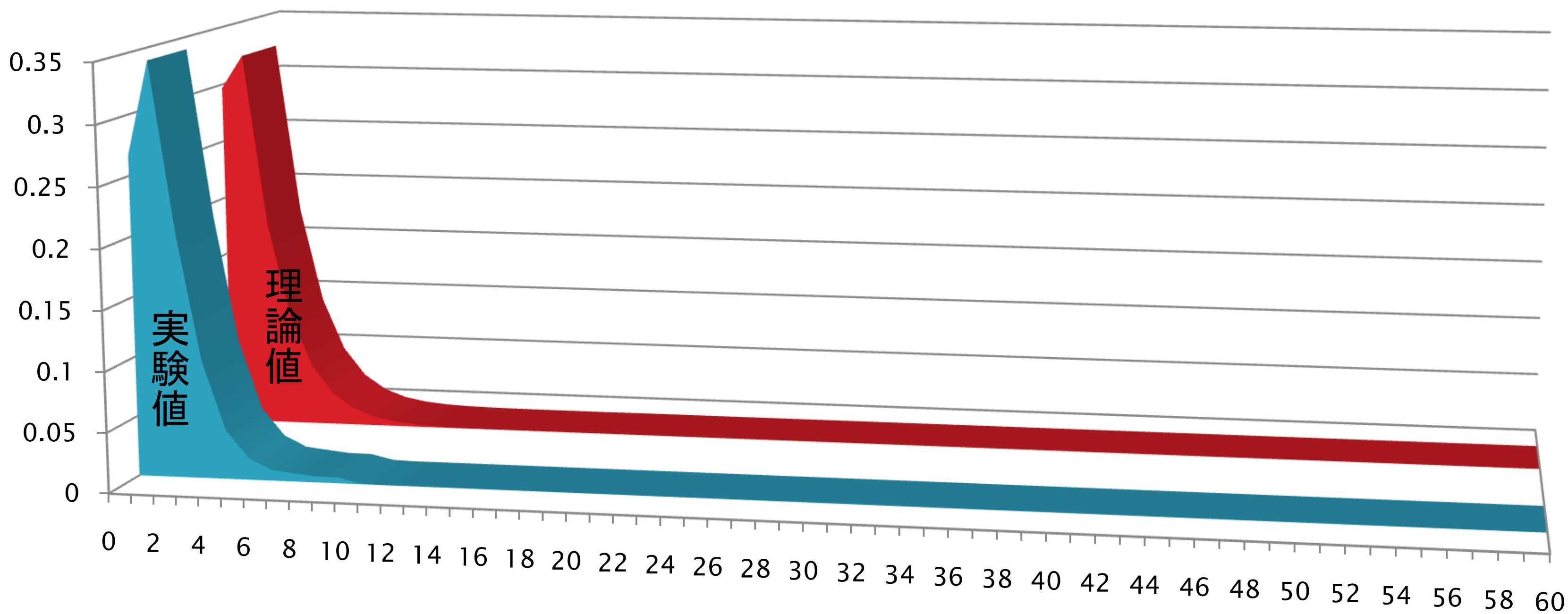
（2） n＝1

$$P(1)=\frac{1}{1-p}\frac{{}_2F_1[2-L,1-N+1,2,\frac{1}{1-p}]}{{}_2F_1[1-L,1-N,2,\frac{1}{1-p}]}$$

（3） n≧2

$$P(n)=\frac{1}{1-p}\frac{L-1}{L}\frac{{}_2F_1[2-L,1-N+n,2,\frac{1}{1-p}]}{{}_2F_1[1-L,1-N,2,\frac{1}{1-p}]}$$

1サイト相関関数



0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60
実験値
理論値

平均と分散

平均

$$< n_1 >= \sum_{k=1}^{N} n_k P(n_k)$$

分散

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= < {n_1}^2 > - < n_1 >^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} {n_k}^2 P(n_k) \left(\sum_{k=1}^{N} n_k P(n_k) \right)^2 \end{aligned}$$

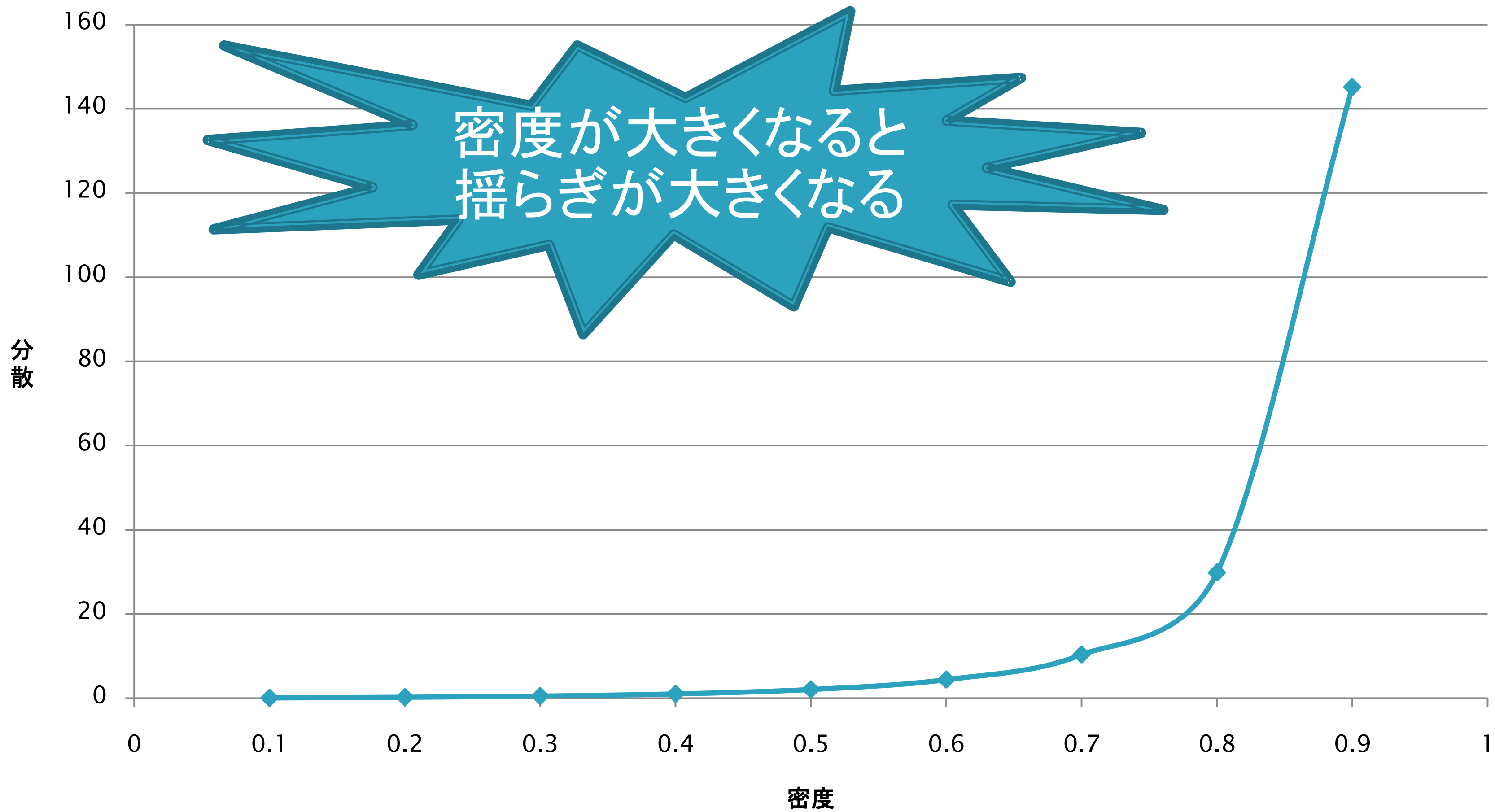
平均

密度	平均
0.1	0.111111111
0.2	0.25
0.3	0.428571429
0.4	0.666666667
0.5	1.00
0.6	1.5
0.7	2.333333333
0.8	4.00
0.9	9.00

分散

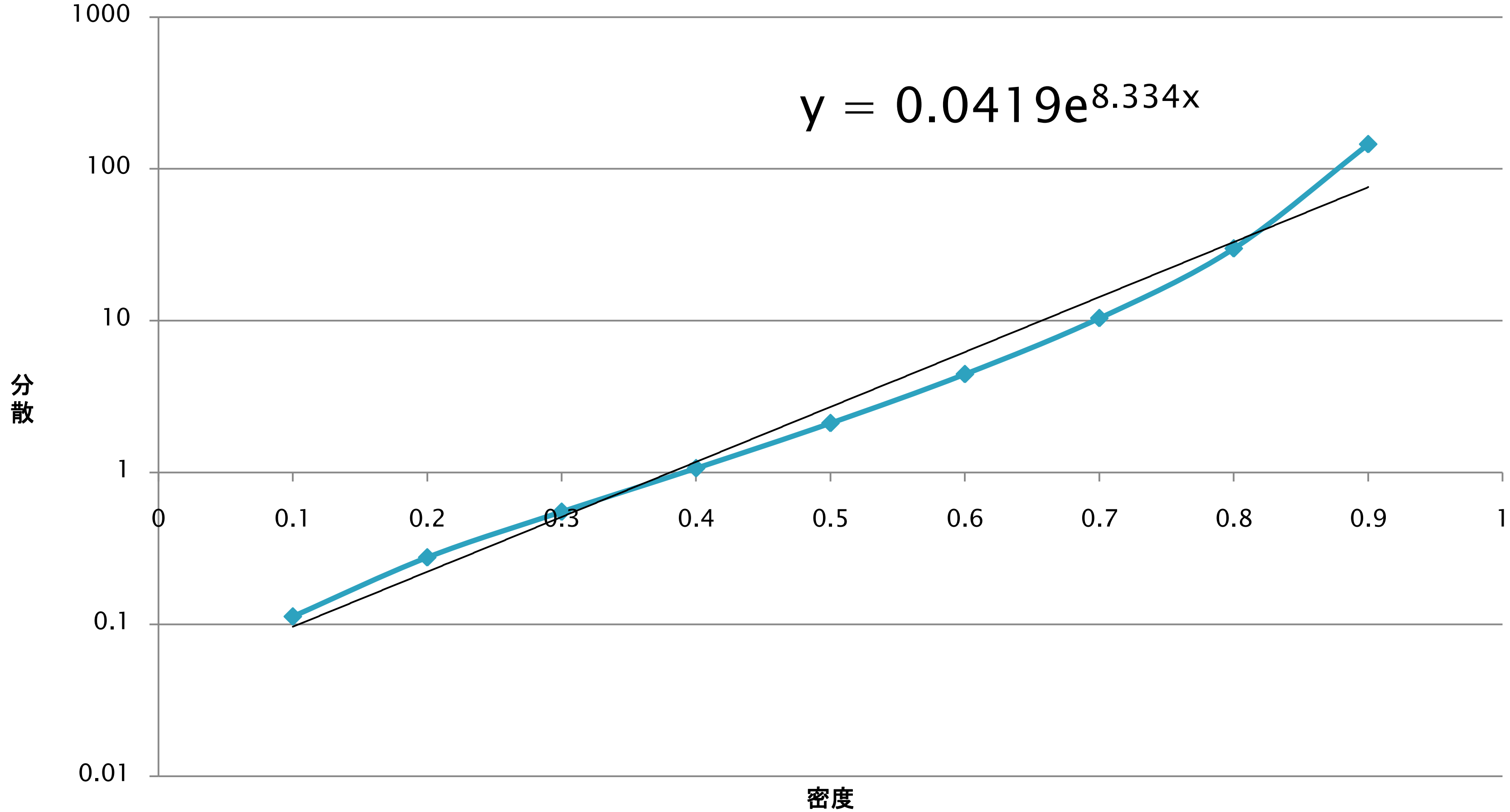
密度	分散	標準偏差
0.1	0.112553	0.335489
0.2	0.275784	0.525151
0.3	0.550988	0.742286
0.4	1.066469	1.0327
0.5	2.113759	1.453877
0.6	4.443023	2.107848
0.7	10.3847	3.22253
0.8	29.86954	5.465303
0.9	145.1733	12.04879

分散

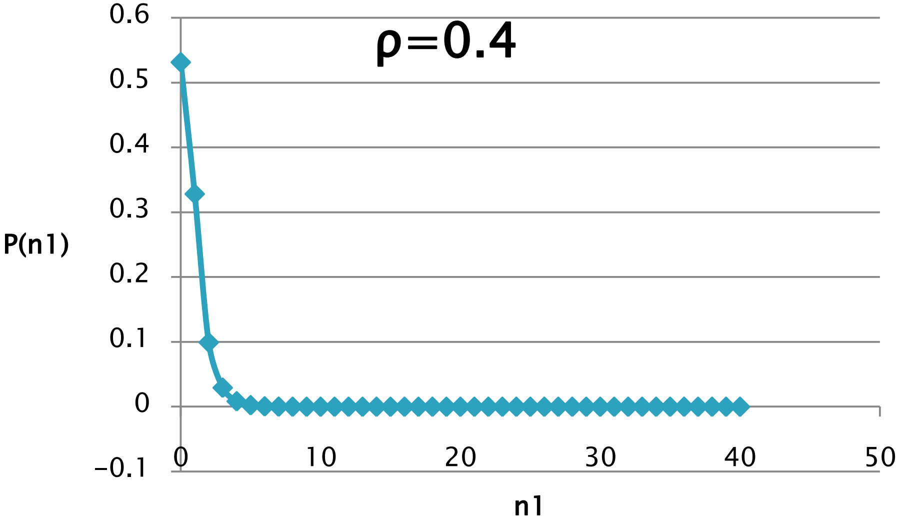


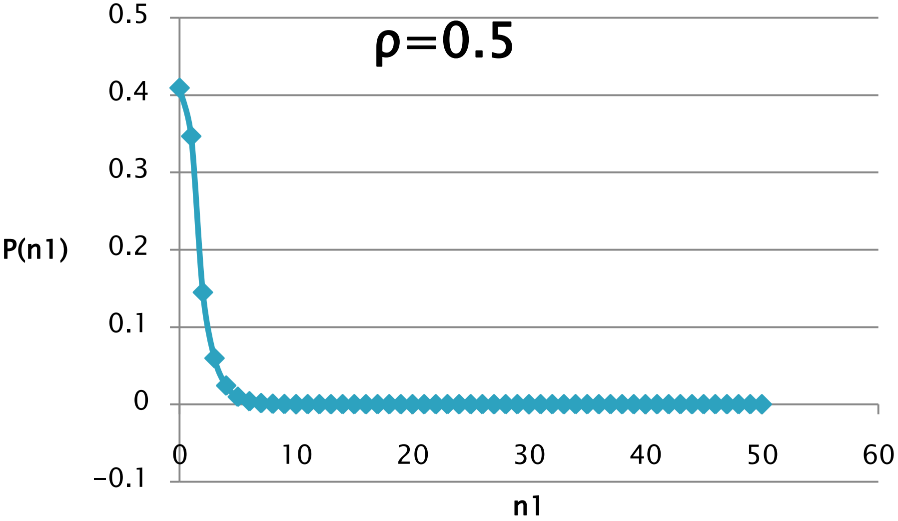
密度が大きくなると
揺らぎが大きくなる
160
140
120
100
80
60
40
20
0
分散
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
密度

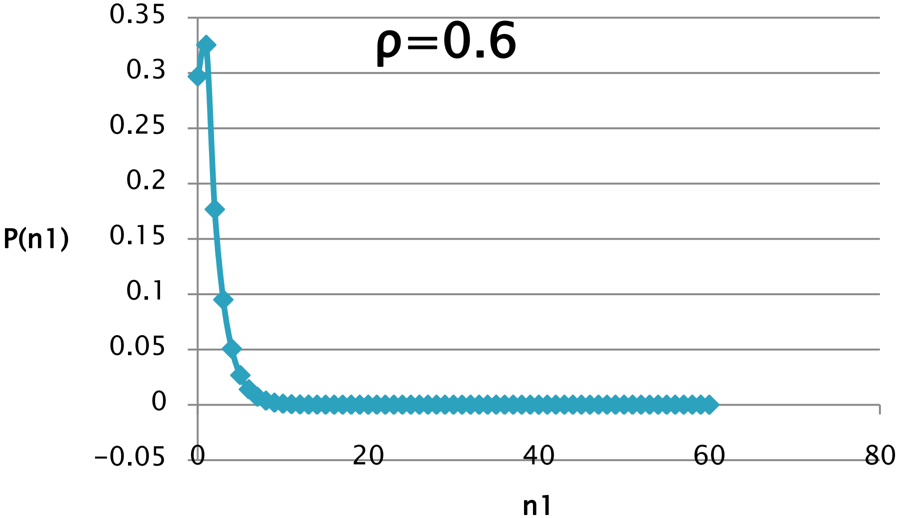
分散(片対数)

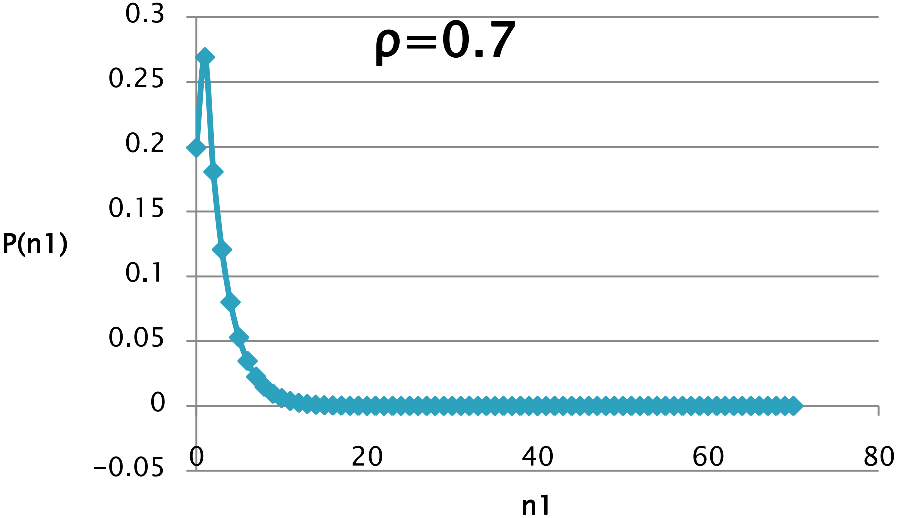


1000
100
10
1
0.1
0.01
分散
$y = 0.0419e^{8.334x}$
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
密度



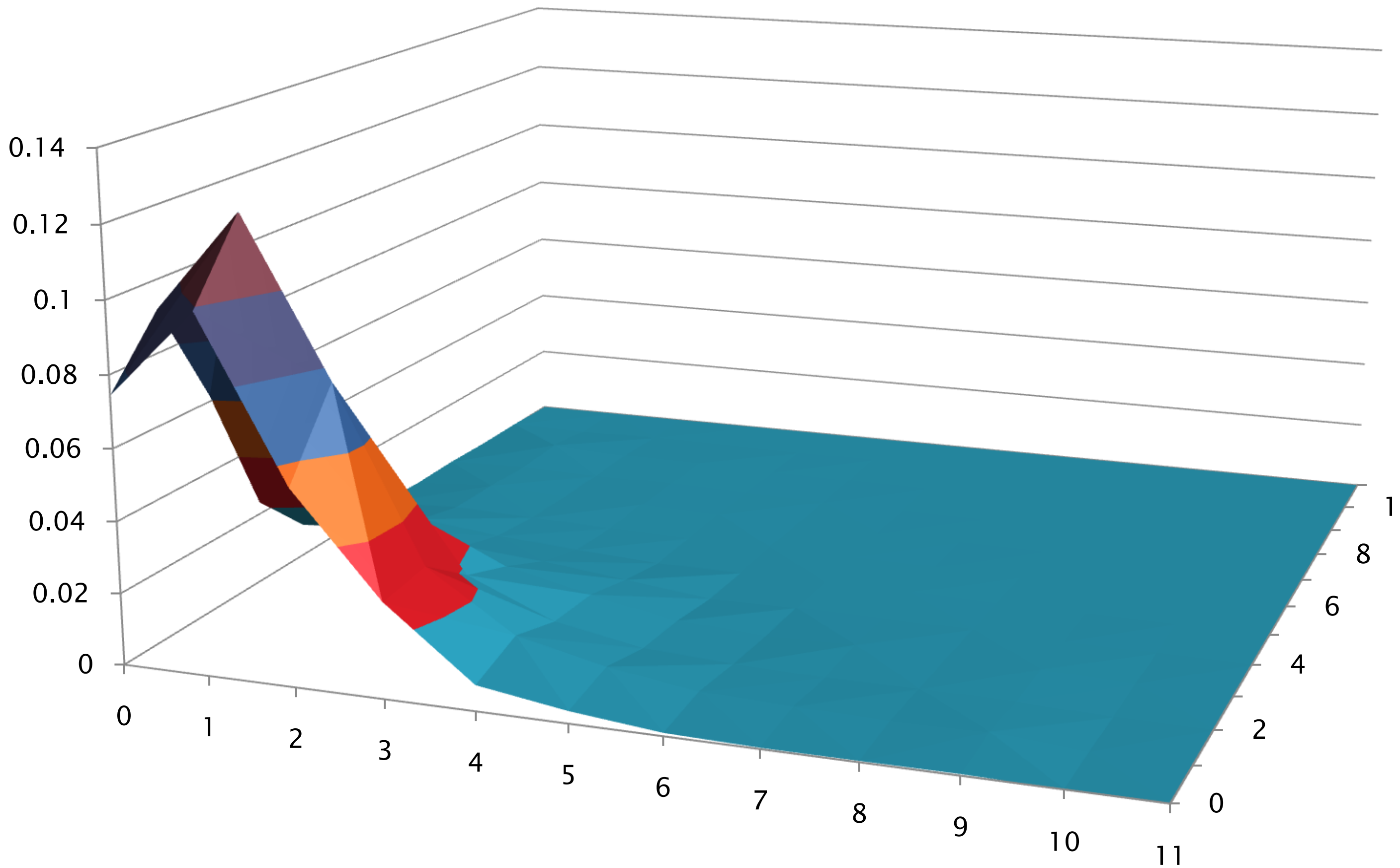




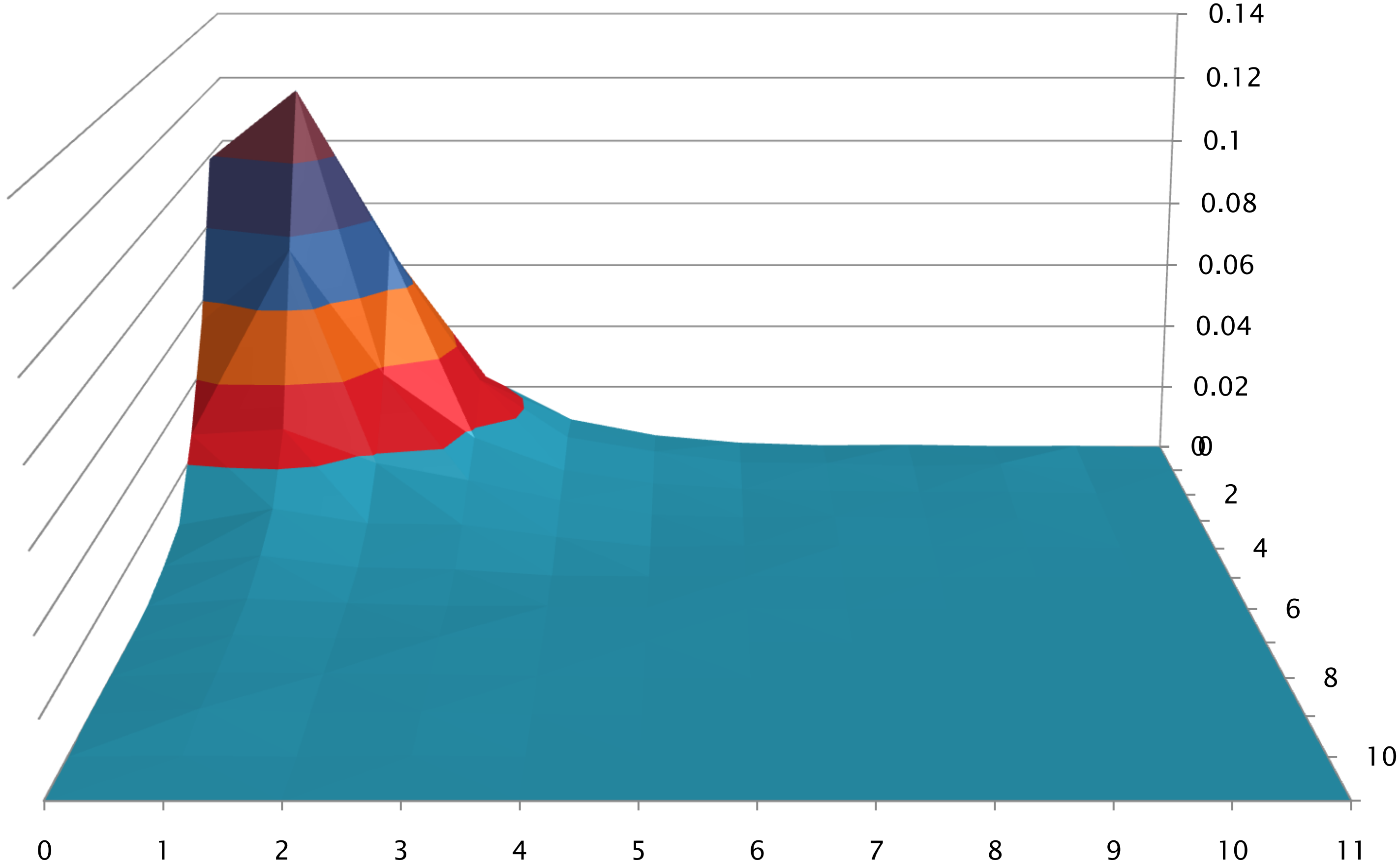


ρが増えてもn1＝0,1でピーク

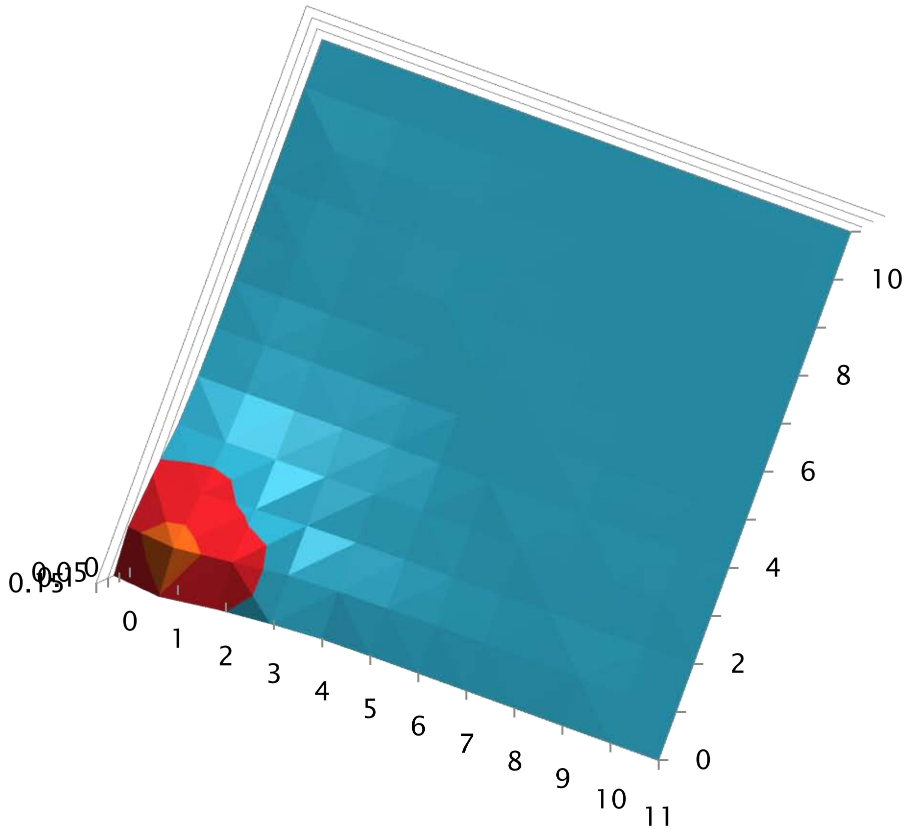
2サイト相関関数



２サイト相関関数



２サイト相関関数



今後の課題と発展

- ①1サイト相関関数は車間n＝0または1でピークを持ち、nが大きくなるにつれてP(n1)は0に漸近する。
- ②分散はプロットできる範囲でフィッティングすると $y=0.419e^{8.334x}$ に従う。
- ③2サイト相関関数から等高線が得られた。
  ⇒色々な密度での等高線を描いてみることで、
  等高線の成長パターンが記述できるのではないだろうか。