数理物理の新展開　ーランダム行列とSLE

Part I.A: 非衝突拡散過程とランダム行列

中央大学理工学部　香取眞理（かとりまこと）

第５４回　物性若手夏の学校　サブゼミ
２００９年８月２２,２３日，　長野県シャレードイン志賀

1. 拡散方程式と1次元ブラウン運動

熱方程式（拡散方程式）

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\Delta u(t,\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad (d\ \text{次元ユークリッド空間})$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \qquad (d\ \text{次元ラプラシアン})$$

拡散現象:非可逆過程の典型例
（<u>非平衡統計力学</u>の研究対象）
ここではまず**1次元系**を考える

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \tag{1.2}$$

1次元熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

まず，次の「グリーン関数」を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}p(t,x|x_0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}p(0,x|x_0), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ p(0,x|x_0) = \delta(x-x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\Downarrow$$

$$p(t,x|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-x_0)^2/(2t)}$$ 基本解

上の初期値問題 (1.3) の解は

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x|x_0)f(x_0)dx_0$$

1次元熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

まず，次の「グリーン関数」を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}p(t,x|x_0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}p(0,x|x_0), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ p(0,x|x_0) = \delta(x-x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\Downarrow$$

$$p(t,x|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-x_0)^2/(2t)}$$

基本解

上の初期値問題 (1.3) の解は

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x|x_0) f(x_0)dx_0$$

積分核の一つと見なして熱核(heat kernel)と呼ばれる

1次元熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{1.3}$$

まず，次の「グリーン関数」を求める．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}p(t,x|x_0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}p(0,x|x_0), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ p(0,x|x_0) = \delta(x-x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\Downarrow$$

$$p(t,x|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-x_0)^2/(2t)}$$ **基本解**

上の初期値問題 (1.3) の解は

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x|x_0) f(x_0)dx_0$$

積分核の一つと見なして熱核(heat kernel)と呼ばれる

「重ね合わせの原理」:方程式が**線形**であるためOK.

$\left(u^2,\ u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right.$ などの非線形項がない.)

熱核: $$p(t,x|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-x_0)^2/(2t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t,x|x_0)dx = 1$$ **規格化**

$$\mathbb{E}\Big[X\Big] = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(t,x|x_0)dx = x_0$$ **平均**

$$\mathbb{E}\Big[(X-x_0)^2\Big] = \langle (x-x_0)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 p(t,x|x_0)dx = t$$ **分散**

平均 x_0, 分散 $t>0$ の**正規分布（ガウス分布）の確率密度**

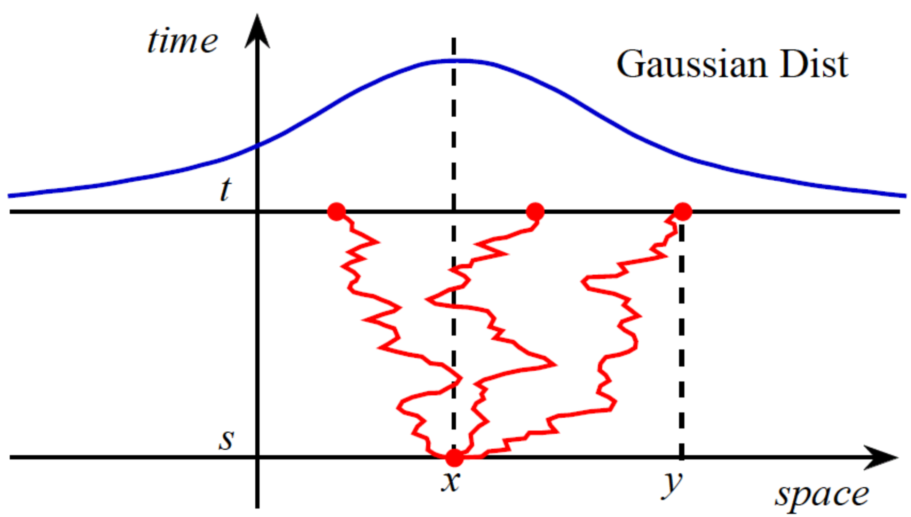
熱核: $$p(t,x|x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(x-x_0)^2/(2t)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x|x_0)dx=1 \qquad \text{規格化}$$

$$\mathbb{E}\Big[X\Big]=\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p(t,x|x_0)dx=x_0 \quad \text{平均}$$

$$\mathbb{E}\Big[(X-x_0)^2\Big]=\langle (x-x_0)^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2p(t,x|x_0)dx=t \quad \text{分散}$$

平均 x_0, 分散 $t>0$ の正規分布（ガウス分布）の確率密度



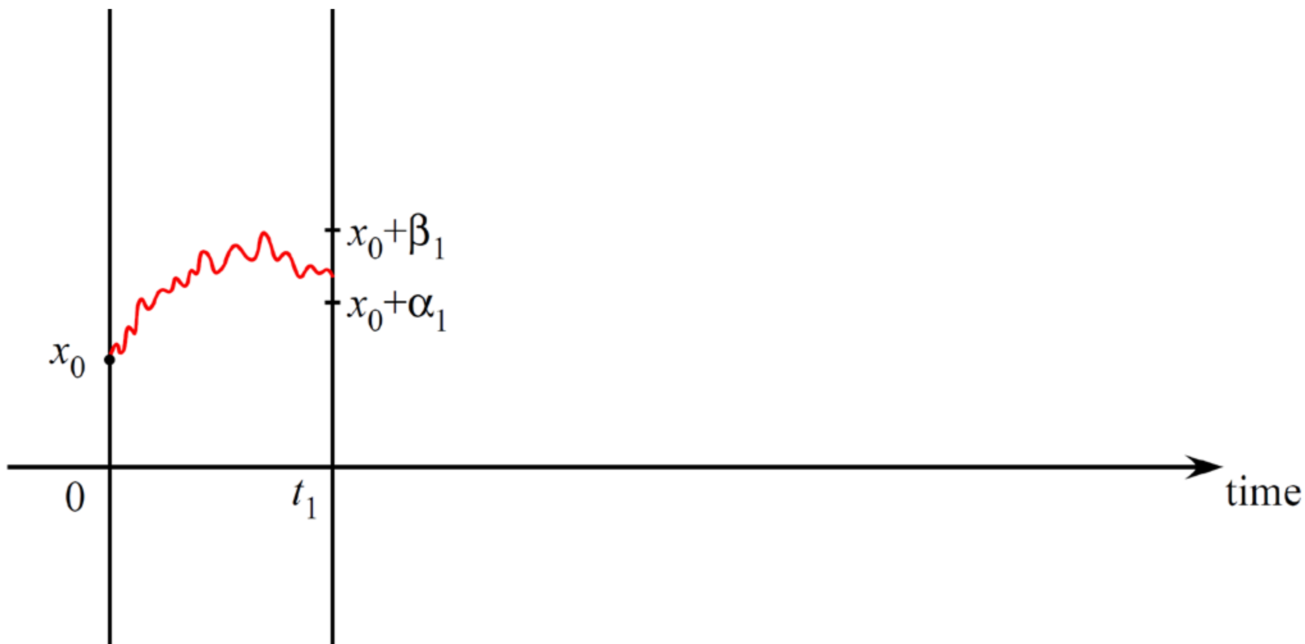
1次元標準ブラウン運動の説明

one-dimensional standard **Brownian motion (BM)** $B(t), t \in [0, \infty)$

1. 初期値を与える： $B(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ とする.

2a. $t_0 \equiv 0$ として，$t_0 < t_1 < \infty$ である任意の時刻 t_1 を選ぶ.
時間区間 $[t_0, t_1]$ での**増分**（変位）は平均 0, 分散 $t_1 - t_0 = t_1$ の正規分布に従う：

$$\mathbb{P}\Big(B(t_1) - B(t_0) \in [\alpha, \beta]\Big) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} e^{-\delta_1^2/\{2(t_1 - t_0)\}}\, d\delta_1 = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} p(t_1 - t_0, \delta_1 | 0)\, d\delta_1.$$



2b. $t_1 < t_2 < \infty$ なる任意の時刻 t_2 を選ぶ.
時間区間 $[t_1, t_2]$ での増分は **2a** で述べた時間区間 $[t_0, t_1]$ での増分とは**独立**に平均 0, 分散 $t_2 - t_1$ の正規分布に従う.

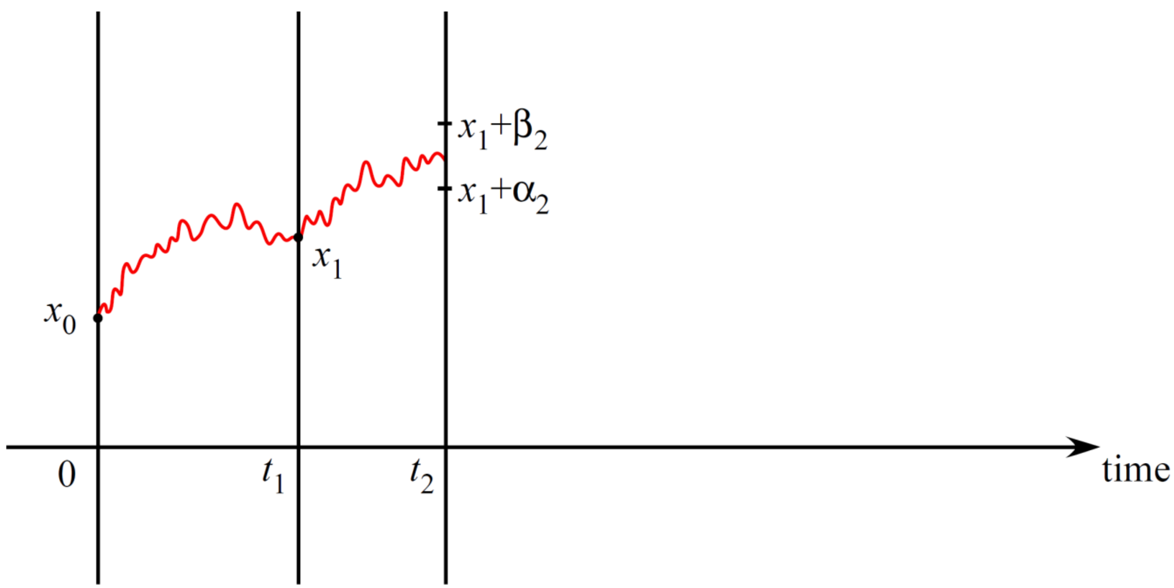
従って

$$B(t_1) - B(t_0) \in [\alpha_1, \beta_1] \quad \text{かつ} \quad B(t_2) - B(t_1) \in [\alpha_2, \beta_2]$$

という 2 つの事象の結合確率は，独立な 2 つの増分の確率の**積**であり

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(B(t_1) - B(t_0) \in [\alpha_1, \beta_1], B(t_2) - B(t_1) \in [\alpha_2, \beta_2]\Big) \\
=\ &\mathbb{P}\Big(B(t_1) - B(t_0) \in [\alpha_1, \beta_1]\Big) \times \mathbb{P}\Big(B(t_2) - B(t_1) \in [\alpha_2, \beta_2]\Big) \\
=\ &\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} e^{-\delta_1^2/\{2(t_1 - t_0)\}}\, d\delta_1 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\delta_2^2/\{2(t_2 - t_1)\}}\, d\delta_2
\end{aligned}$$

で与えられる.

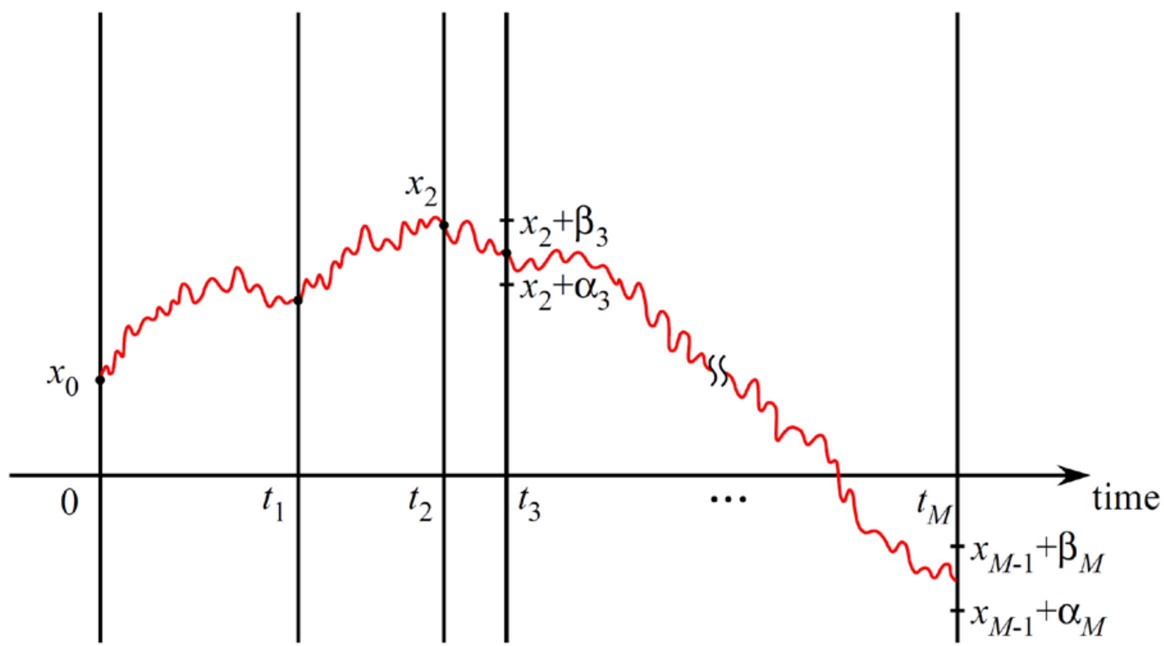


2c. $M = 1, 2, 3, \cdots$ として，任意の時刻の列

$$t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_M$$

に対して，時間区間 $[t_{j-1}, t_j], j = 1, 2, \cdots, M$ での増分は**それぞれ独立**で，
各々平均 0, 分散 $t_j - t_{j-1}$ の正規分布に従う：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(B(t_1) - B(t_0) \in [\alpha_1, \beta_1], B(t_2) - B(t_1) \in [\alpha_2, \beta_2], \cdots B(t_M) - B(t_{M-1}) \in [\alpha_M, \beta_M]\Big) \\
= &\prod_{j=1}^{M} \mathbb{P}\Big(B(t_j) - B(t_{j-1}) \in [\alpha_j, \beta_j]\Big) \\
= &\prod_{j=1}^{M} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} e^{-\delta_j^2/\{2(t_j - t_{j-1})\}} \, d\delta_j \\
= &\prod_{j=1}^{M} \int_{\alpha_j}^{\beta_j} p(t_j - t_{j-1}, \delta_j | 0) \, d\delta_j.
\end{aligned}$$



変数変換　$\{\delta_1, \cdots, \delta_M\} \quad \Longrightarrow \quad \{x_1, \cdots, x_M\}$

$$\begin{aligned} & \delta_j = x_j - x_{j-1}, \quad 1 \le j \le M \\ \Longleftrightarrow \quad & x_1 = x_0 + \delta_1 \\ & x_2 = x_1 + \delta_2 = x_0 + \delta_1 + \delta_2 \\ & \cdots \\ & x_M = x_{M-1} + \delta_M = x_0 + \sum_{j=1}^{M} \delta_j . \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}^{x_0}\Big(B(t_1) \in [a_1, b_1], B(t_2) \in [a_2, b_2], \cdots B(t_M) \in [a_M, b_M]\Big) \\ = \quad & \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_M}^{b_M} dx_M \prod_{j=1}^{M} p(t_j - t_{j-1}, x_j | x_{j-1}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

$p(t-s, y|x)$　**推移確率密度関数（transition probability density)**

3.　ランダムな経路（道）1 つ 1 つを ω で表す．ω を**標本**，**サンプル**，あるいは**実現** **(realization)** という．
ω 全体の集合を Ω と書く．
任意の $\omega \in \Omega$ に対して，ω を固定したとき，$B(t,\omega)$ は t の関数として, **連続な実数値関数**である.
（確率 1 で連続である．連続な version がとれる.）

BMの性質

A. マルコフ性 (Markov property) 任意の $0 \le s < t$ を与えたとき

$B(t)$ の分布は，$B(s)$ の値が与えられると

$B(u), u < s$ の値に影響されずに定まる

という性質を持つ.

B. マルチンゲール性 (martingale property) 任意の $s > 0$ に対して $B(s)$ を与えたとき,

その後の Brown 運動は $B(u), u < s$ の値に影響されず,

$B(t) - B(s)$ は（条件付き）平均が零である

という性質を持つ.

- **アンドレイ・アンドレイヴィッチ・マルコフ**
  （Андрей Андреевич Марков,
  ラテン転写: Andrey (Andrei) Andreyevich Markov,
  1856年6月14日 - 1922年7月20日）
  ロシアの数学者. 特に確率過程論に関する業績で知られる,
  彼の研究成果は, 後にマルコフ連鎖として知られるようになった.

- **アンドレイ・アンドレイヴィッチ・マルコフ**
  （Андрей Андреевич Марков,
  ラテン転写: Andrey (Andrei) Andreyevich Markov,
  1856 年 6 月 14 日 - 1922 年 7 月 20 日）
  ロシアの数学者. 特に確率過程論に関する業績で知られる,
  彼の研究成果は, 後にマルコフ連鎖として知られるようになった.

- **マルチンゲール**とは，元々は勝ち負けが半々の賭けでの**「倍賭け」**という必勝法のこと．まず１万円を賭け，負けたら２万円，以下４万円，８万円，１６万円，… と続ける．勝ったときにやめることにすれば，いつも１万円儲かる.（ただしこれは，無限の賭け金を持っていれば の話なので要注意．）転じて，各時刻での期待値が有限であり，過去の遍歴には依らずに一定であるような確率過程をマルチンゲールとよぶ.

独立増分

$$t > 0, \quad 0 < \Delta t \ll 1, \quad \Delta B(t) \equiv B(t + \Delta t) - B(t)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Delta B(t) \in [\alpha, \beta]\Big) &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\delta^2/(2\Delta t)}\, d\delta \\
\mathbb{E}\Big[\Delta B(t)\Big] &= \langle \Delta B(t) \rangle = 0 \qquad \textbf{平均 0} \\
\mathbb{E}\Big[(\Delta B(t))^2\Big] &= \langle (\Delta B(t))^2 \rangle = \Delta t \qquad \textbf{分散 } \Delta t
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

「ランダムな事象に対しては，いつもその平均的な振る舞いを見ることにする」という方針を暗黙の了解の下に

$\mathbb{E}\Big[\cdots\Big]$ や $\langle \cdots \rangle$ を書かないことにする：

$\Delta t \quad \Longrightarrow \quad dt, \quad \Delta B(t) \quad \Longrightarrow \quad dB(t)$ という無限小増分を考えて，

$$\begin{aligned}
dB(t) &= 0 \\
(dB(t))^2 &= dt
\end{aligned}$$

と書くことにする．

$0 < s < t$ に対して

$$\mathbb{P}\Big(\Delta B(s) \in [\alpha, \beta], \quad \Delta B(t) \in [\alpha', \beta']\Big) = \mathbb{P}\Big(\Delta B(s) \in [\alpha, \beta]\Big)\mathbb{P}\Big(\Delta B(t) \in [\alpha', \beta']\Big).$$

したがって,

$$\langle \Delta B(s) \rangle = 0, \quad \langle \Delta B(t) \rangle = 0$$
$$\langle \Delta B(s) \Delta B(t) \rangle = \langle \Delta B(s) \rangle \langle \Delta B(t) \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dB(s)dB(t) = 0, \quad s \neq t$$

まとめると

$$dB(s)dB(t) = \begin{cases} dt & \text{if } s = t \\ 0 & \text{if } s \neq t \end{cases} \tag{1.7}$$

2．伊藤の公式 (Ito's formula)

- $B_1(t), B_2(t), \cdots, B_d(t)$: d 個の独立な BM

$$\Longrightarrow \quad dB_j(t) = 0, \quad 1 \le j \le d$$

$$\left.\begin{array}{ll} (dB_j(t))^2 = dt & 1 \le j \le d \\ dB_j(t)dB_k(t) = 0 & 1 \le j \ne k \le d \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad dB_j(t)dB_k(t) = \delta_{jk}dt$$

$$(\text{もちろん} \quad dB_j(t)dB_j(s) = 0, \quad s \ne t.)$$

- $F(x_1, x_2, \cdots, x_d)$：d 変数連続関数（２回微分可能）
  テイラー展開

$$dF(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_\ell} dx_k dx_\ell + \cdots .$$

$x_j \Longrightarrow B_j(t), 1 \leq j \leq d$ (独立な BM) とする.
$\boldsymbol{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), \cdots, B_d(t))$ とおく.
$dx_k dx_\ell \Longrightarrow dB_k(t)dB_\ell(t) = \delta_{k\ell}dt$

$$\begin{aligned} dF(\boldsymbol{B}(t)) &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\boldsymbol{B}(t))dB_k(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_\ell}(\boldsymbol{B}(t))dB_k(t)dB_\ell(t) + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\boldsymbol{B}(t))dB_k(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}(\boldsymbol{B}(t))dt + (\text{高次の微小量}). \end{aligned}$$

伊藤の公式

$$dF(\boldsymbol{B}(t)) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_k}(\boldsymbol{B}(t))dB_k(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}(\boldsymbol{B}(t))dt. \tag{2.1}$$

右辺第 1 項 : **マルチンゲール項**:平均が零
右辺第 2 項 : **ドリフト項** (有界変動項):ある速度をもつ移流を表す

3. d 次元ベッセル過程 (BESd)

$d = 1, 2, 3, \cdots$ として, d **次元ブラウン運動**

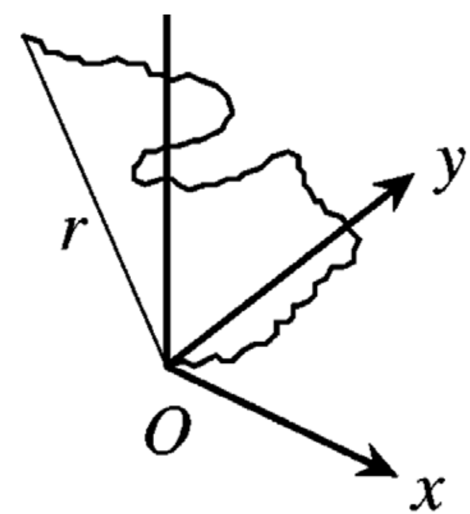
$$\boldsymbol{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), \cdots, B_d(t))$$

を考える.
このベクトルの大きさ ($\boldsymbol{B}(t)$ の動径成分 $|\boldsymbol{B}(t)|$)

$$X(t) = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + \cdots + B_d(t)^2} \tag{3.1}$$

を考えると，これは **1 次元拡散過程**となる．ただし,

$$X(t) \in \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$



$$F(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$$

とおくと，

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{x_k}{F}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F} - \frac{x_k^2}{F^3}$$

であるが

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F}\left\{d - \frac{1}{F^2}\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right\} = \frac{d-1}{F}$$

なので，伊藤の公式 (2.1) と，$B_1(t), \cdots, B_d(t)$ の独立性

$$dB_k(t)dB_\ell(t) = \delta_{k\ell}dt, \quad 1 \le k, \ell \le d \tag{3.2}$$

より

$$dX(t) = \frac{1}{X(t)}\sum_{k=1}^{d} B_k(t)dB_k(t) + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X(t)}$$

となる．

ここで，マルチンゲール項の二次変分をとると，再び (3.2) より

$$\left(\frac{1}{X(t)}\sum_{k=1}^{d} B_k(t)dB_k(t)\right)^2 = \frac{1}{X(t)^2}\sum_{k=1}^{d}(B_k(t))^2(dB_k(t))^2 = \frac{1}{X_t^2}\sum_{k=1}^{d}(B_k(t))^2 dt = dt$$

であるから，これは，上の $\{B_j(t)\}_{j=1}^d$ とは別の BM, $B(t)$ によって $dB(t)$ と与えられるものとしてよい．

以上より，X_t が満たす**確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE)** は

$$dX(t) = dB(t) + \frac{d-1}{2}\frac{1}{X(t)}dt \tag{3.3}$$

で与えられることが分かった．

以下では $d \geq 1$ として (d を連続変数とする)，一般に (3.3) の SDE に従う 1 次元拡散過程を考え，これを d **次元ベッセル過程**（BES_d と略記）と呼ぶ．

確率微分方程式 (SDE)

$$dX(t) = dB(t) + \frac{d-1}{2}\frac{1}{X(t)}dt \tag{3.4}$$

コルモゴロフ後進方程式 (Kolmogorov backward equation)

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,y|x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t,y|x) + \frac{d-1}{2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}p(t,y|x) \tag{3.5}$$

この解として，BES_d に対して，時間 $t \geq 0$ の間に $x > 0$ から $y \geq 0$ へ推移する**推移確率密度関数**が

$$p(t,y|x) = \frac{1}{t}\frac{y^{\nu+1}}{x^{\nu}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right)I_{\nu}\left(\frac{xy}{t}\right) \tag{3.6}$$

と与えられる．ただし，

$$\nu = \frac{d-2}{2} \geq -\frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d = 2(\nu+1) \geq 1 \tag{3.7}$$

であり，$I_{\nu}(z)$ は変形ベッセル関数

$$I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

である．ここで，$\Gamma(z)$ はガンマ関数：$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{z-1}du, \quad \mathrm{Re}\, z > 0$ を表す．

以下では，初期値を上付き添字で表し，$x>0$ から出発した BES_d を $X^x(t)$ と書くことにする:

$$dX^x(t) = \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X^x(t)} + dB(t), \quad t \geq 0, \qquad X^x(0) = x > 0. \tag{3.8}$$

$x>0$ から出発した BES_d が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す；

$$T_x = \inf\Big\{t > 0 : X^x(t) = 0\Big\}. \tag{3.9}$$

SDE (3.8) は $t \leq T_x$ までは well-defined である.
次の定理が証明できる.

定理 3.1 (i) $d \geq 2 \implies T_x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

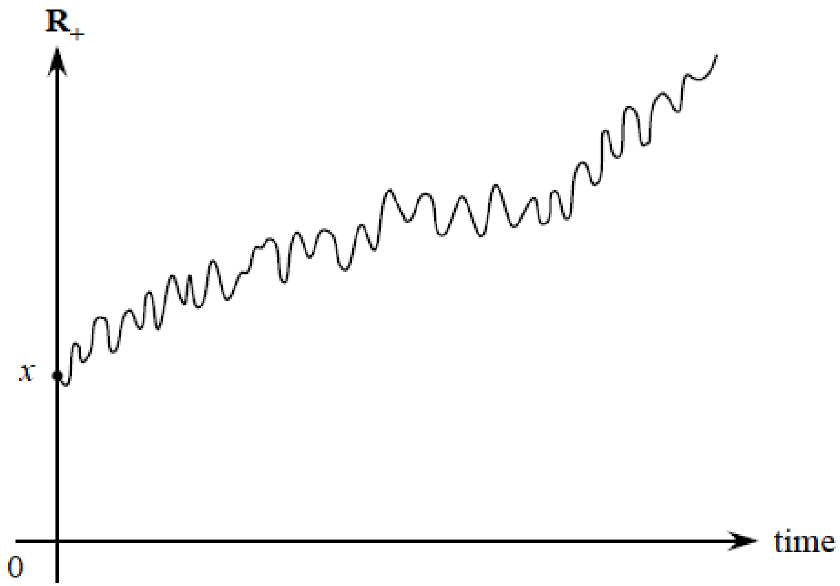
(ii) $d > 2 \implies \lim_{t\to\infty} X^x(t) = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

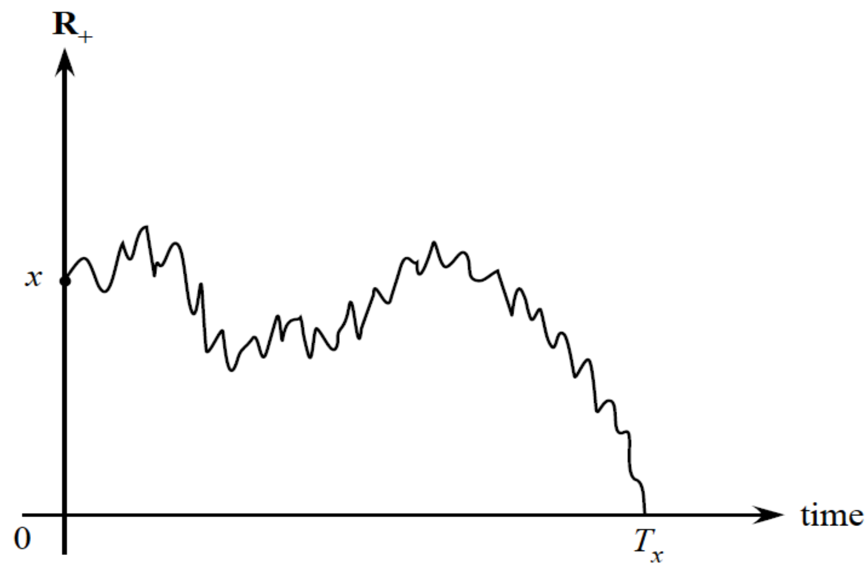
(iii) $d = 2 \implies \inf_{t>0} X^x(t) = 0, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.
つまり，$x>0$ から出発した BES_2 は原点にはぶつからないが，原点に無限に近づく.

(iv) $1 \leq d < 2 \implies T_x < \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

$x>0$ から出発した BES_d が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す；

$$T_x = \inf\left\{t>0 : X^x(t)=0\right\}.$$





定理 3.1 (i) $d \geq 2 \implies T_x=\infty, {}^\forall x>0$ が確率 1 で成り立つ．

(ii) $d>2 \implies \lim_{t\to\infty} X^x(t)=\infty, {}^\forall x>0$ が確率 1 で成り立つ．

(iii) $d=2 \implies \inf_{t>0} X^x(t)=0, {}^\forall x>0$ が確率 1 で成り立つ．
つまり，$x>0$ から出発した BES_2 は原点にはぶつからないが，原点に無限に近づく．

(iv) $1 \leq d < 2 \implies T_x<\infty, {}^\forall x>0$ が確率 1 で成り立つ．

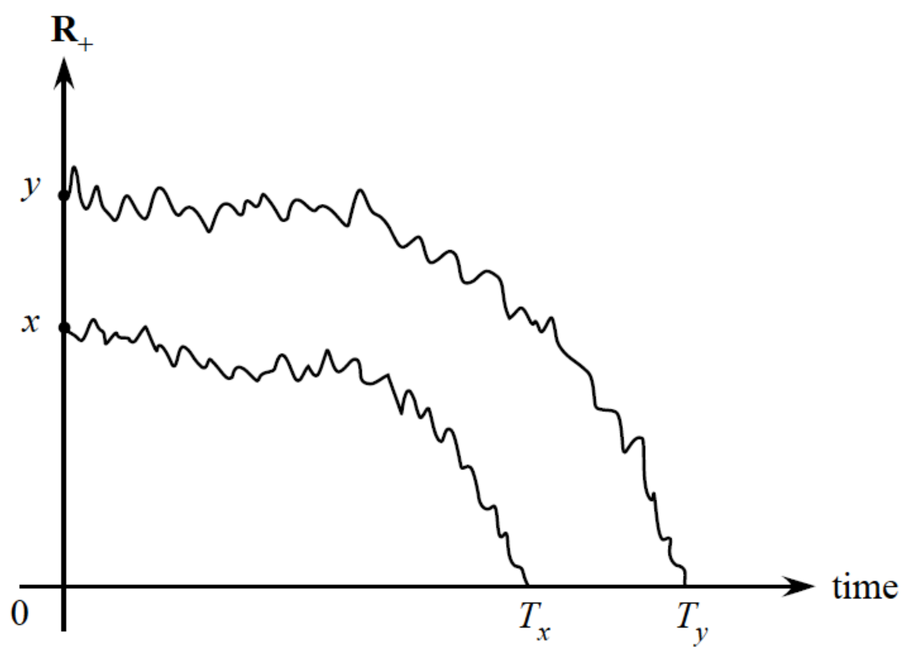
以下では，$1 \leq d < 2$ の場合を考えることにする．$x \in \mathbb{R}_+$ に対して，同一の BM, B_t を用いて

$$X^x(t) = x + B(t) + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X^x(s)}, \quad t \leq T_x \tag{3.10}$$

で与えられる BES_d の族 $\{X^x(t)\}_{x>0}$ を考えることにする．この定義より

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad X^x(t) < X^y(t), \ {}^\forall t < T_x \quad \Longrightarrow \quad T_x \leq T_y$$

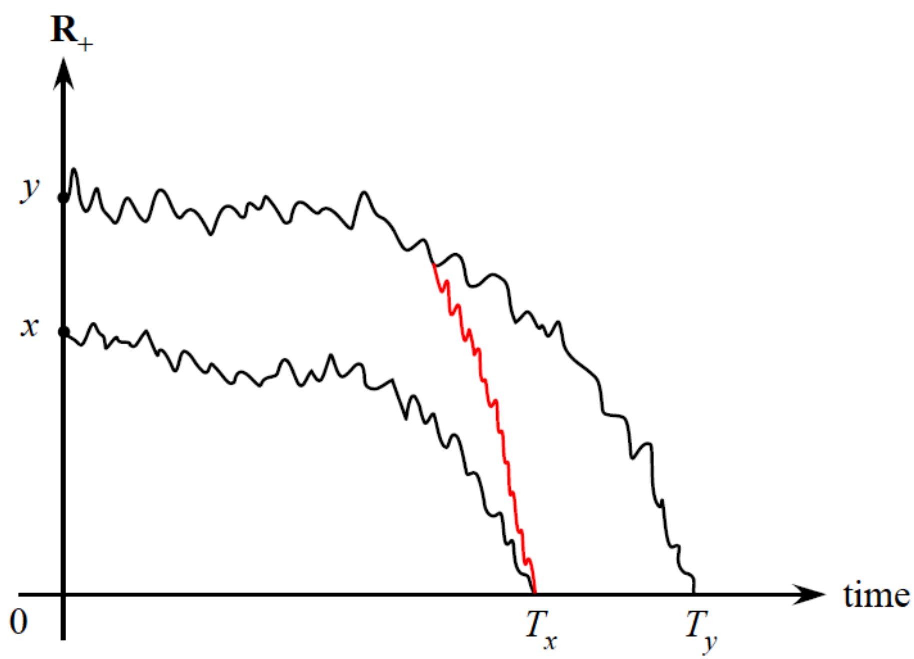
であることは明らかである．$x < y$ だが，$T_x = T_y$ となることはあり得るであろうか．



次の定理は，$x < y$ であっても，$T_x = T_y$ ということがあり得ることを主張するものである．

定理 3.2 (i) $\dfrac{3}{2} < d < 2 \quad \Longrightarrow \quad x < y$ に対して $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$.

(ii) $1 \leq d \leq \dfrac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x < y$ に対して，$T_x < T_y$ が確率 1 で成り立つ．



$\frac{3}{2} < d < 2$ のときは，$x \geq 0$ に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) > 0$$

であることを証明できるが，
さらに，この確率の x 依存性は**ガウスの超幾何関数**

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{3.11}$$

を用いて，正確に表すことができる．
ただしここで，$(c)_k = \Gamma(c+k)/\Gamma(c) = c(c+1)\cdots(c+(k-1))$ である．

命題 3.2.1 $\frac{3}{2} < d < 2$ のとき，$x \geq 0$ に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 1 - \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2d-3} F\left(2d-3, d-1, 2(d-1); \frac{x}{1+x}\right). \tag{3.12}$$