

# 数理物理の新展開 ーランダム行列とSLE

## Part I.B: 非衝突拡散過程とランダム行列

中央大学工学部 香取眞理(かとりまこと)

第54回 物性若手夏の学校 サブゼミ

2009年8月22,23日, 長野県シャレードイン志賀

# 4. 複素BMとエルミート行列値BM

- Let  $B_{ij}(t), \tilde{B}_{ij}(t), 1 \leq i, j \leq N$ , be mutually independent (standard one-dim.) Brownian motions started from the origin. Define

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}(t) & (i < j) \\ B_{ii}(t) & (i = j) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} B_{ij}(t) & (i > j) \end{cases} \quad a_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{ij}(t) & (i < j) \\ 0 & (i = j) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{B}_{ij}(t) & (i > j) \end{cases}$$

- Consider the  $N \times N$  **Hermitian Matrix-Valued** stochastic process

$$\Xi(t) = \left( \xi_{ij}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N} = \left( s_{ij}(t) + \sqrt{-1} a_{ij}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

That is,

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t) + \sqrt{-1} a_{12}(t) & s_{13}(t) + \sqrt{-1} a_{13}(t) & \dots & s_{1N}(t) + \sqrt{-1} a_{1N}(t) \\ s_{12}(t) - \sqrt{-1} a_{12}(t) & s_{22}(t) & s_{23}(t) + \sqrt{-1} a_{23}(t) & \dots & s_{2N}(t) + \sqrt{-1} a_{2N}(t) \\ s_{13}(t) - \sqrt{-1} a_{13}(t) & s_{23}(t) - \sqrt{-1} a_{23}(t) & s_{33}(t) & \dots & s_{3N}(t) + \sqrt{-1} a_{3N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1N}(t) - \sqrt{-1} a_{1N}(t) & s_{2N}(t) - \sqrt{-1} a_{2N}(t) & s_{3N}(t) - \sqrt{-1} a_{3N}(t) & \dots & s_{NN}(t) \end{pmatrix}$$

•We have considered a pair of **independent** Brownian Motions,  $B(t), \tilde{B}(t)$

$$\langle dB(t)d\tilde{B}(t) \rangle = \langle dB(t) \rangle \langle d\tilde{B}(t) \rangle = 0 \quad t \geq 0.$$

We define a complex-conjugate pair of **complex-valued stochastic variables**,

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B(t) + \sqrt{-1}\tilde{B}(t)) \quad x(t)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(B(t) - \sqrt{-1}\tilde{B}(t))$$

•By definition

$$dx(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(dB(t) + \sqrt{-1}d\tilde{B}(t)) \quad dx(t)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(dB(t) - \sqrt{-1}d\tilde{B}(t))$$

which give

$$\langle (dx(t))^2 \rangle = \left\langle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(dB(t) + \sqrt{-1}d\tilde{B}(t)) \right\}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle (dB(t))^2 \rangle - \langle (d\tilde{B}(t))^2 \rangle \right\} = 0$$

$$\langle (dx(t)^*)^2 \rangle = \left\langle \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(dB(t) - \sqrt{-1}d\tilde{B}(t)) \right\}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle (dB(t))^2 \rangle - \langle (d\tilde{B}(t))^2 \rangle \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} \langle dx(t)dx(t)^* \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(dB(t) + \sqrt{-1}d\tilde{B}(t)) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(dB(t) - \sqrt{-1}d\tilde{B}(t)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \langle (dB(t))^2 \rangle + \langle (d\tilde{B}(t))^2 \rangle \right\} = dt \end{aligned}$$

**We have a correlation between the complex-conjugate pairs.**

- Consider the variation of the matrix,  $d\Xi(t) = (d\xi_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$

It is clear that

$$\langle d\xi_{ij}(t) \rangle = 0 \quad (1 \leq i, j \leq N)$$

And by the previous observation, we find that

$$\langle (d\xi_{ij}(t))^2 \rangle = 0 \quad (1 \leq i \neq j \leq N)$$

$$\langle d\xi_{ij}(t)d\xi_{ji}(t) \rangle = \langle d\xi_{ij}(t)d\xi_{ij}(t)^* \rangle = dt \quad (1 \leq i \neq j \leq N)$$

$$\langle (d\xi_{ii}(t))^2 \rangle = dt \quad (1 \leq i \leq N)$$

They are summarized as

$$\langle d\xi_{ij}(t)d\xi_{kn}(t) \rangle = \delta_{in}\delta_{jk}dt \quad (1 \leq i, j, k, n \leq N)$$

- Since  $\Xi(t)$  is a Hermitian matrix-valued process, at each time  $t$  there is a **Unitary Matrix**  $U(t) = (u_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq N}$ , such that

$$U(t)^+ \Xi(t)U(t) = \Lambda(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)\}$$

where the **eigenvalues** are in the **increasing order**

$$\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t), \quad \forall t \in [0, \infty)$$

- We can regard  $\lambda(t) \equiv (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)) \in \mathbf{R}^N$

as an  **$N$ -particle stochastic process in one dimension.**

## QUESTION

By the **diagonalization** of the matrix, what kind of **interactions emerge** among the  $N$  particles in the process  $\lambda(t)$  ?

- From now on we assume that

$$\lambda_1(0) < \lambda_2(0) < \dots < \lambda_N(0)$$

- And we consider the following conditional configuration-space of one-dim.  $N$  particles,

$$\mathbf{W}_N^A = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N \}$$

(This is called the **Weyl chamber of type  $A_{N-1}$**  .)

## ANSWER 1 (by Dyson 1962)

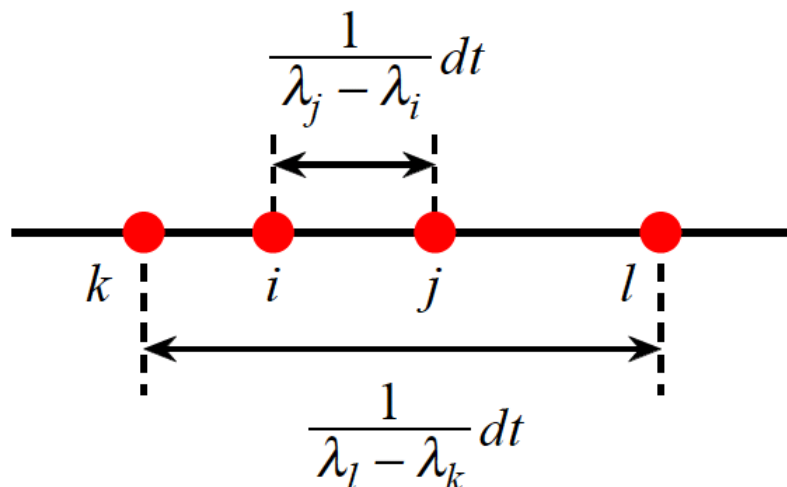
1. For all  $t > 0$ ,  $\lambda(t) \in \mathbf{W}_N^A$  with **Probability 1**.
2. The process is given as a solution of the stochastic differential equations,

$$d\lambda_i(t) = dB_i(t) + \sum_{j:1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} dt \quad 1 \leq i \leq N, t \in [0, \infty)$$

where  $B_i(t)$  are independent standard one-dim. Brownian motions ( $1 \leq i \leq N$ )

- This process is called **Dyson's Brownian motion model**.

- Strong **repulsive forces** emerge among any pair of particles  $\propto \frac{1}{\text{particle distance}}$



- Let 
$$\begin{cases} h(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j - x_i) & \text{(product of differences)} \\ b_i(\mathbf{x}) = \sum_{j: 1 \leq j \leq N, j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \ln h(\mathbf{x}) \quad (1 \leq i \leq N), \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), b_2(\mathbf{x}), \dots, b_N(\mathbf{x})) \end{cases}$$
- Consider  $p(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = [ \text{transition probability density from } \lambda(s) = \mathbf{x} \text{ to } \lambda(t) = \mathbf{y} ]$ ,  
where  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ .

It solves the **Kolmogorov backward equation** in the form

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{x}} p(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} p(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y})$$

## ANSWER 2

Introduce a **determinant**

$$f(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} [G(t, y_j | x_i)] \quad \text{with} \quad G(t, y_j | x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x_i - y_j)^2 / 2t}$$

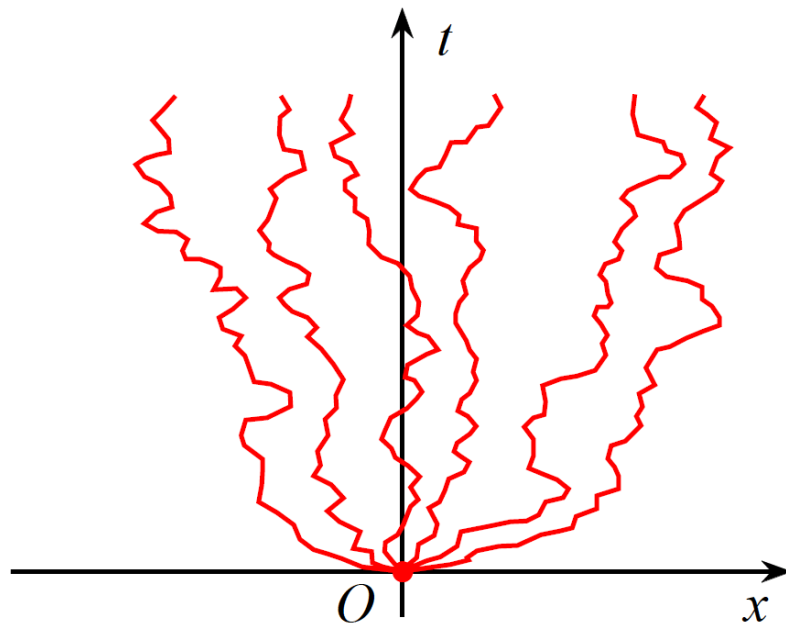
Then the solution of the FP equation is given by

$$p(s, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{1}{h(\mathbf{x})} f(t - s, \mathbf{y} | \mathbf{x}) h(\mathbf{y}) \quad \text{for} \quad 0 < s < t < \infty, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_N^A.$$

- If  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  at  $s = 0$ , (**all particles starting from the origin**)

$$p(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_1} \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} h(\mathbf{y})^2 \quad \text{where} \quad |\mathbf{y}|^2 = \sum_{i=1}^N y_i^2, \quad C_1 = (2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i).$$

When all the particles are starting from the origin  $\mathbf{0}$ ,



**Strong Repulsive Interactions**



$$p(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) \propto \prod_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y_k^2/2t} \right\} \times \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j - y_i)^2$$



**Product of Independent Gaussian Distributions**

As  $|y_j - y_i| \rightarrow 0$ ,  $p(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) \rightarrow 0$ .

**Dyson's Brownian motion model = NONCOLLIDING Diffusion Particle Systems**



# 5. Karlin-McGregor の公式

- 2つの1次元拡散過程  $X_1, X_2$  において,  $X_1(\tau) = X_2(\tau)$  であるとき, この2つの過程は時刻  $\tau$  で衝突したという.
- $x = X_1(\tau) = X_2(\tau)$  を衝突点とよぶ. これは, 時空平面において2本の経路が衝突(交差)することを意味する.
- $N$  粒子拡散過程で, ある時間区間で衝突が起こらないものを非衝突拡散過程とよぶ.
- 非衝突拡散過程を解析するには, 推移確率密度関数に対する行列式を用いた表示が有効である. この行列式表示は, 確率論では **Karlin-McGregor の公式**, 組み合わせ論では **Lindström-Gessel-Viennot の公式** とよばれる.  
またこの公式は, 量子力学で自由 Fermi 粒子からなる多体系の波動関数を表す Slater 行列式の確率過程版と見なすこともできる.

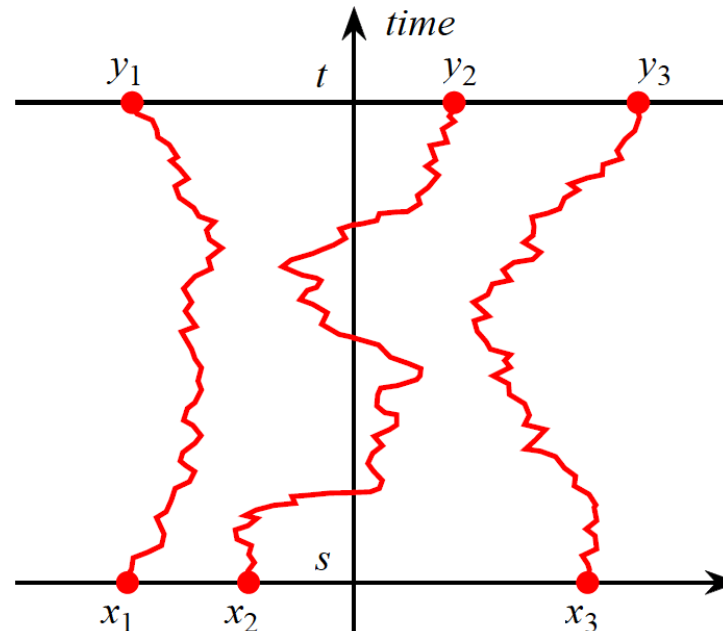
定理 4.1 (Karlin-McGregor の公式)  $g(s, x; t, y)$  を 1 次元拡散過程の推移確率密度関数とする.

$N$  個の始点  $x_j, j = 1, 2, \dots, N$  と  $N$  個の終点  $y_j, j = 1, 2, \dots, N$  がそれぞれ  $x_1 < x_2 < \dots < x_N$  と  $y_1 < y_2 < \dots < y_N$  を満たすとする.

このとき,  $N$  本の経路が時間区間  $[s, t]$  で非衝突である確率密度関数は行列式

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [g(s, x_j; t, y_k)]$$

で与えられる.



証明 行列式の定義より

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} \left[ g(s, x_j; t, y_k) \right] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N g(s, x_j; t, y_{\sigma(j)}). \quad (5.1)$$

ただしここで、 $\mathfrak{S}_N$  は  $\{1, 2, \dots, N\}$  の置換全体の集合（対称群とよばれる群をなす）。

時空平面上の  $(s, x)$  から  $(t, y)$  へ至る経路全体からなる集合を  $\Omega(s, x; t, y)$  と書くことにする。

$\pi_j \in \Omega(s, x_j; t, y_{\sigma(j)}), j = 1, 2, \dots, N$  とすると、(5.1) は、置換  $\sigma$  と  $N$  本の経路の組  $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$  に対する母関数とみなせる。

この組  $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$  のうち, 少なくとも 1 回は経路の衝突があるものを選ぶ. それに対して

$$\tau = \sup \left\{ s < u < t : \pi_1, \dots, \pi_N \text{ のいずれかが時刻 } u \text{ で衝突} \right\}$$

としこの衝突点を  $v \in \mathbb{R}$  とする.

また, 時刻  $\tau$  で衝突した経路を  $\pi_{l_1}, \pi_{l_2}$  とする.

(3 本以上の経路が同時に衝突した場合は, そのうち添字の小さい 2 つを選ぶことにする.)

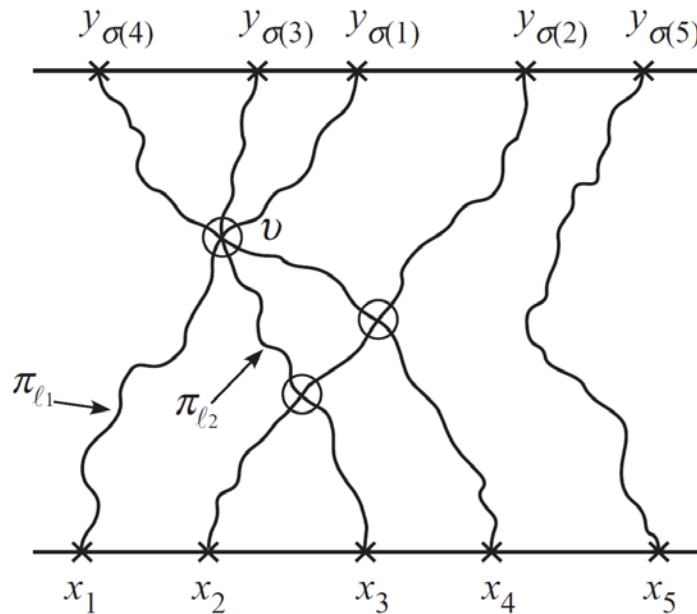


図 1: 衝突のある経路の組  $(\pi_1, \dots, \pi_N)$  の例. 衝突点  $v$  を通過する 2 つの経路  $\pi_{l_1}$  と  $\pi_{l_2}$  を選ぶ.

$$\pi_{\ell_1} = \pi_{\ell_1}(\rightarrow v)\pi_{\ell_1}(v \rightarrow), \quad \pi_{\ell_2} = \pi_{\ell_2}(\rightarrow v)\pi_{\ell_2}(v \rightarrow)$$

と書くことにする.

図のように, 衝突点  $v$  で経路を入れ替えたものを

$$\pi'_{\ell_1} = \pi_{\ell_1}(\rightarrow v)\pi_{\ell_2}(v \rightarrow), \quad \pi'_{\ell_2} = \pi_{\ell_2}(\rightarrow v)\pi_{\ell_1}(v \rightarrow)$$

として,  $j \neq \ell_1, \ell_2$  に対しては  $\pi'_j = \pi_j$  とする.

また, 置換  $\sigma$  と **互換**  $(\ell_1, \ell_2)$  との積置換を  $\sigma'$  と書く.

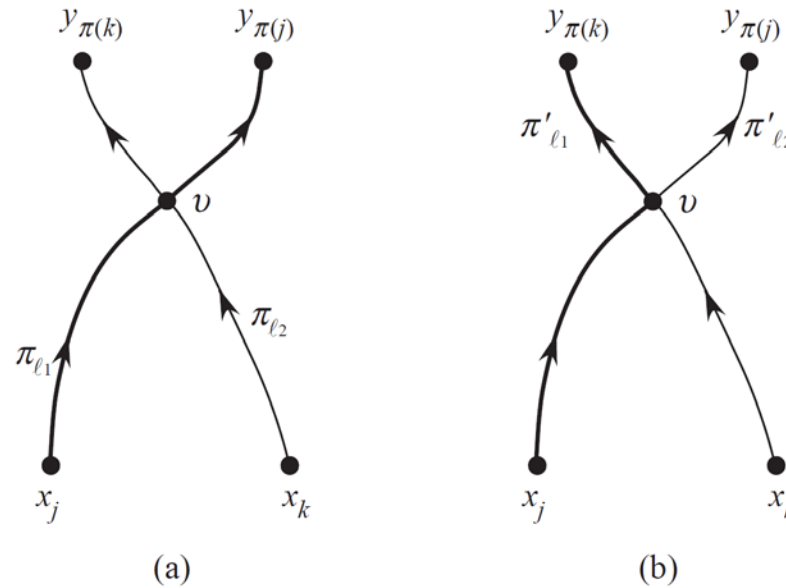


図 2: (a) 経路  $\pi_{\ell_1}$  と  $\pi_{\ell_2}$ . (b) 経路  $\pi'_{\ell_1}$  と  $\pi'_{\ell_2}$ .

すると

$$(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N) \iff (\sigma', \pi'_1, \dots, \pi'_N) \quad (5.2)$$

は 1 対 1 に対応することが分かる.

$\text{sgn}(\sigma') = -\text{sgn}(\sigma)$  なので, 組  $(\sigma, \pi_1, \dots, \pi_N)$  の母関数 (5.3) において, (5.2) の組の対は逆符号で足されるので相殺される.

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [g(s, x_j; t, y_k)] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N g(s, x_j; t, y_{\sigma(j)}). \quad (5.3)$$

以上の考察より, 母関数 (5.3) において衝突がある経路からの寄与は全て相殺されることが示された.

他方, 非衝突の場合は  $\sigma$  は**恒等変換**であり,  $\text{sgn}(\sigma) = 1$  であるから, 結局 (5.3) は非衝突の経路のみの和になる. ■

# 6. 一般化された Bru の定理

- $N \times N$  Hermite 行列全体の集合を  $\mathcal{H}(N)$ ,  $N \times N$  実対称行列全体の集合を  $\mathcal{S}(N)$  とおく.
- 行列  $A$  の転置行列を  ${}^tA$ , 複素共役を  $\bar{A}$ , エルミート共役を  $A^\dagger \equiv {}^t\bar{A}$  と書くことにする.
- Bru は  $\mathcal{H}(N)$  値過程の一例である Wishart 過程について調べ, その固有値過程が満たす方程式を導いた. この結果は, 行列値過程の各要素  $\xi_{jk}(t)$ ,  $1 \leq j, k \leq N$  が複素数値連続半マルチンゲールである場合に拡張することができる [Katori-Tanemura (2004)].
- この拡張の結果得られた一般化された **Bru の定理**を紹介し, 次節でその応用例を与えることにする.
- 証明のポイントは行列値の連続半マルチンゲールの積に Itô の公式 を適用することにある.  
 $M$  と  $\widetilde{M}$  を成分が連続半マルチンゲールである  $N \times N$  の行列とする. このとき

$$d(M^\dagger \widetilde{M}) = (dM)^\dagger \widetilde{M} + M^\dagger (d\widetilde{M}) + (dM)^\dagger (d\widetilde{M})$$

となる. 右辺第3項が確率解析に特有のものである.

- $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$  を  $\mathcal{H}(N)$  値過程  $\Xi(t) = (\xi_{jk}(t))_{1 \leq j, k \leq N}$  の固有値を成分に持つベクトルとする. ただし, 大小関係  $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq \dots \leq \lambda_N(t)$  を満たすものとする.
- このとき  $U(t) = (u_{jk}(t))_{1 \leq j, k \leq N}$  を

$$U(t)^\dagger \Xi(t) U(t) = \Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t))$$

というように,  $\Xi(t)$  を対角化するユニタリ行列の族とする.

- $$\Gamma_{jk, \ell m}(t) dt = \left( U(t)^\dagger d\Xi(t) U(t) \right)_{jk} \left( U(t)^\dagger d\Xi(t) U(t) \right)_{\ell m}$$
とおき, また  $(U(t)^\dagger d\Xi(t) U(t))_{jj}$  の有界変動部分を  $d\Upsilon_j(t)$  と書くこととする.



**定理 6.1** [一般化された Bru の定理] 複素数値過程  $\xi_{jk}(t)$ ,  $1 \leq j, k \leq N$  を連続半マルチンゲールとする. このとき  $\Xi(t)$  の固有値  $\lambda(t)$  は次の確率微分方程式を満たす.

$$d\lambda_j(t) = dM_j(t) + dJ_j(t), \quad t \in (0, \tau), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.1)$$

ただし  $\mathbf{M}(t) = (M_1(t), M_2(t), \dots, M_N(t))$  は  $dM_j(t)dM_k(t) = \Gamma_{jj,kk}(t)dt$  であるマルチンゲールであり,  $\mathbf{J}(t) = (J_1(t), J_2(t), \dots, J_N(t))$  は

$$dJ_j(t) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j}} \frac{1}{\lambda_j(t) - \lambda_k(t)} \mathbf{1}_{\{\lambda_j(t) \neq \lambda_k(t)\}} \Gamma_{jk,kj}(t) dt + d\Upsilon_j(t)$$

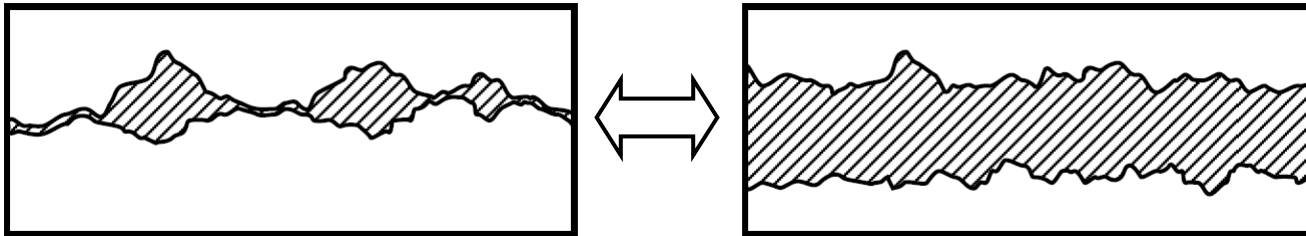
で与えられる有界変動過程である. ここで  $\mathbf{1}_{\{\omega\}}$  は条件  $\omega$  の指示関数であり, 条件  $\omega$  が成り立つときは 1, それ以外は 0 の値を与える.

# 7. VICIOUS WALKS

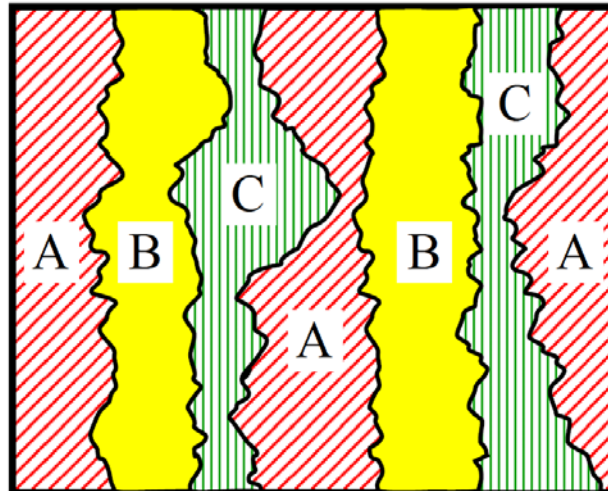
## As Temporally Inhomogeneous Noncolliding Particle Systems

### Physical Motivations to Study Vicious Walker Models

- As a model of **Wetting or Melting Transitions**  
(Fisher (JSP 1984))



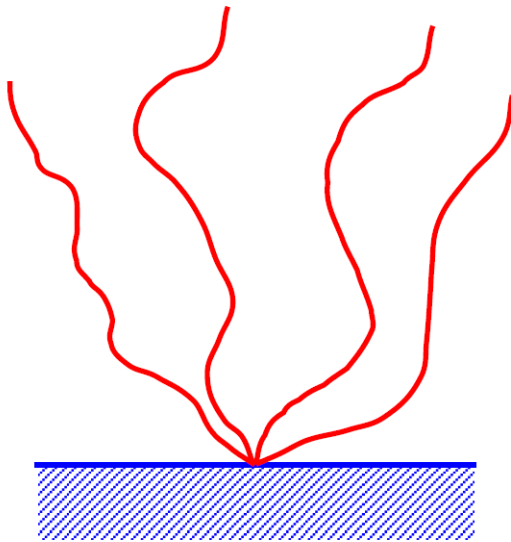
- As a model of **Commensurate-Incommensurate Transitions**  
(Huse and Fisher (PRB 1984))



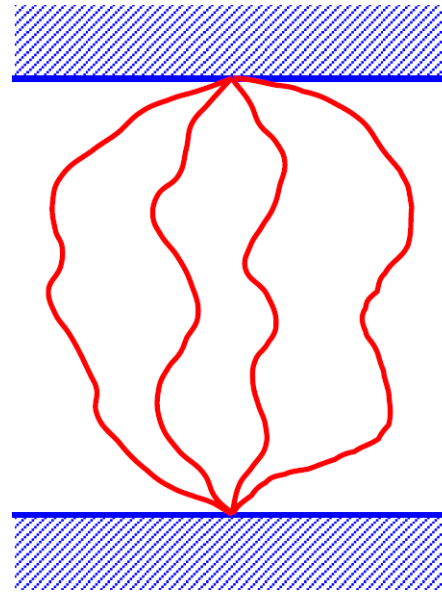
•As a model of **Directed Polymer Networks**

(de Gennes (J.Chem.Phys. 1968), Essam and Guttmann (PRE 1995))

(a) polymer with **star topology**



(b) polymer with **watermelon topology**

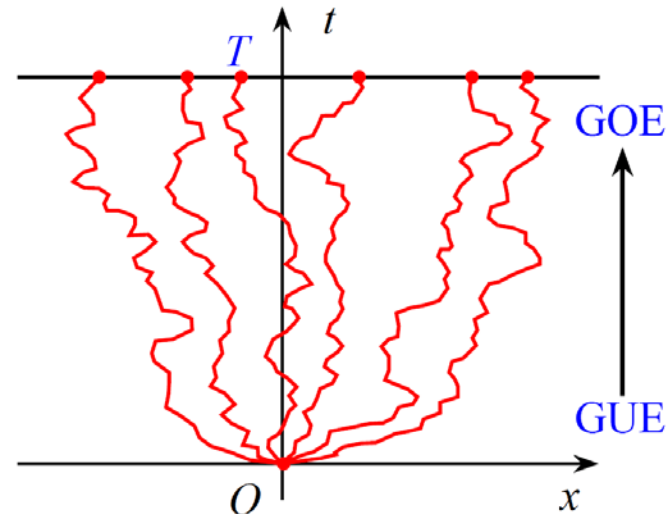


From the viewpoint of solid-state physics,  
we want to treat **Large but Finite system with Boundary Effects.**

## 8. PATTERNS of NONCOLLIDING PATHS AND RANDOM MATRIX THEORIES

### 8.1 STAR CONFIGURATIONS

- There occurs a transition in distribution from GUE to GOE.



- This temporal transition can be described by the **Two-Matrix Model** of Pandey and Mehta, in which a Hermitian random matrix is coupled with a real symmetric random matrix.

See Katori and Tanemura, PRE **66** (2002) 011105/1-12.

- Techniques developed for **multi-matrix models** can be used to evaluate the **dynamical correlation functions**. **Quaternion determinantal expressions** are derived.

See Nagao, Katori and Tanemura, Phys. Lett. A **307** (2003) 29-35.

- Using the exact correlation functions, we can discuss the **scaling limits** of infinite particles  $N \rightarrow \infty$  and the infinite time-period  $T \rightarrow \infty$ .

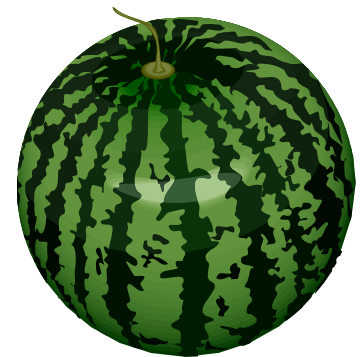
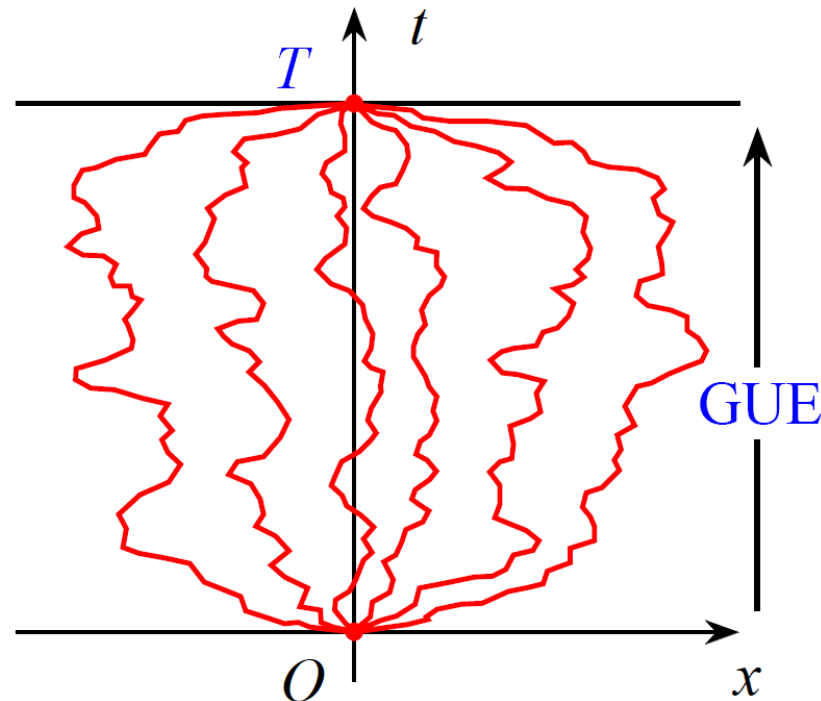
See Katori, Nagao and Tanemura, Adv.Stud.Pure Math. **39** (2004) 283-306.

## 8.2 Watermelon Configurations

- Consider a finite time-period  $[0, T]$  and set  $\mathbf{y}=\mathbf{0}$  at the initial time  $t=0$  and the final time  $t=T$ .
- The transition probability density is given as

$$q^{\text{watermelon}}(0, \mathbf{0}; t, \mathbf{y}) = \frac{1}{C_1} \left\{ t \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \right\}^{-N^2/2} \exp \left\{ - \frac{|\mathbf{y}|^2}{2t(1-t/T)} \right\} h(\mathbf{y})^2$$

- The distribution is **kept in the form of GUE**.
- Only the **variance** changes as a function of  $t$  as  $\sigma^2 = t \left( 1 - \frac{t}{T} \right)$ .



## 8.3 Banana Configurations

- Consider  $2N$  particle system. Set  $\mathbf{y}=\mathbf{0}$  at the initial time  $t=0$ .

At the final time  $t=T$ , we assume the following **Pairing of Particle Positions**.

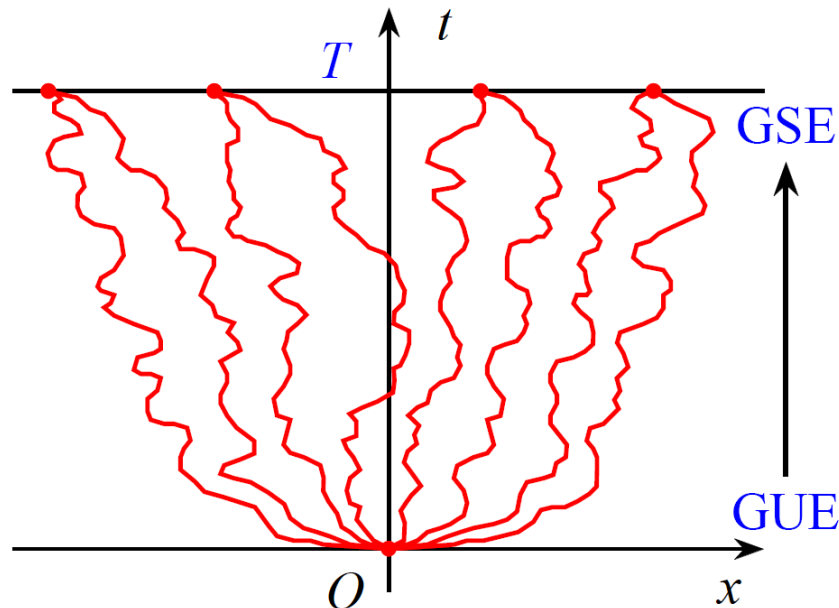
$$y_1 = y_2, y_3 = y_4, \dots, y_{2N-1} = y_{2N} \quad \text{with} \quad y_1 < y_3 < \dots < y_{2N-1} .$$

- The transition probability density is given by

$$q^{\text{banana}}(0, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) = \frac{f(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) N^{\text{banana}}(T-t, \mathbf{y})}{N^{\text{banana}}(T, \mathbf{x})} \quad \text{for } 0 < s < t \leq T, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}_{2N}^A ,$$

$$\text{where } N^{\text{banana}}(t, x) = \int_{\mathbf{W}_N^A} \det \left[ G(t, y_j | x_i) \quad \frac{x_i}{t} G(t, y_j | x_i) \right] .$$

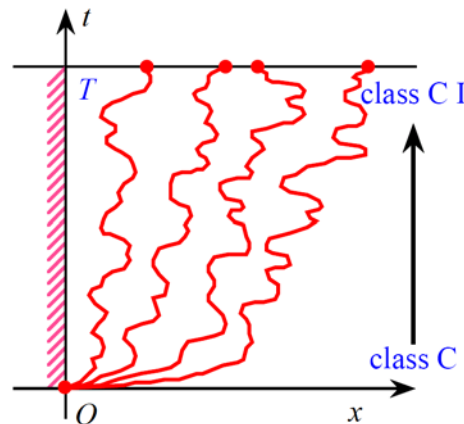
- As  $t = 0 \rightarrow T$ , there occurs a transition from the **GUE distribution to the GSE distribution**.



## 8.4 Star Configurations with Absorbing Wall

- Put an **Absorbing Wall** at the origin. Consider the  $N$  Brownian particles started from 0 conditioned **never to collide with each other nor to collide with the wall**.
- This is identified with the  $h$ -transform of the  $N$ -dim. Absorbing Brownian motion in

$$\mathbf{W}_N^C = \{x \in \mathbf{R}^N : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N\} \quad (\text{Weyl chamber of type } C_N).$$



- For  $T < \infty$ , we can obtain a process showing a transition from the **class C distribution** of Altland and Zirnbauer (1996);

$$q^C(0, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) \propto \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j^2 - y_i^2)^2 \prod_{k=1}^N y_k^2 \quad \text{for } 0 < t \ll T$$

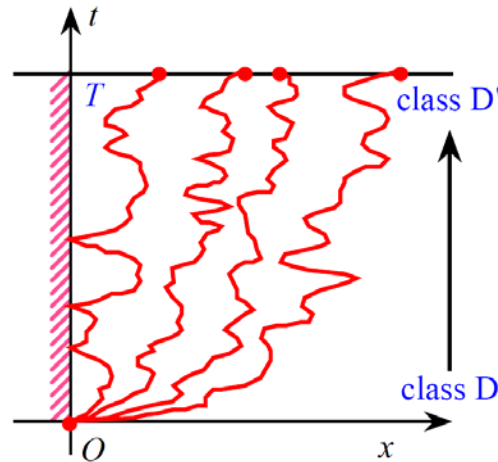
to the **class CI distribution** (studied for a theory of **quantum dots**)

$$q^C(0, \mathbf{x}; T, \mathbf{y}) \propto \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2T}\right\} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j^2 - y_i^2) \prod_{k=1}^N y_k \quad \text{at } t = T.$$

## 8.5 Star Configurations with Reflection Wall

- Put a **reflection wall** at the origin. Consider the  $N$  Brownian particles started from 0 conditioned **never to collide with each other**.
- This is identified with the  $h$ -transform of the  $N$ -dim. Absorbing Brownian motion in

$$\mathbf{W}_N^D = \{x \in \mathbf{R}^N : |x_1| < x_2 < \dots < x_N\} \quad (\text{Weyl chamber of type } D_N).$$



For  $T < \infty$ , we can obtain a process showing a transition from the **class D distribution** of Altland and Zirnbauer (1996);

$$q^D(0, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) \propto \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j^2 - y_i^2)^2 \quad \text{for } 0 < t \ll T$$

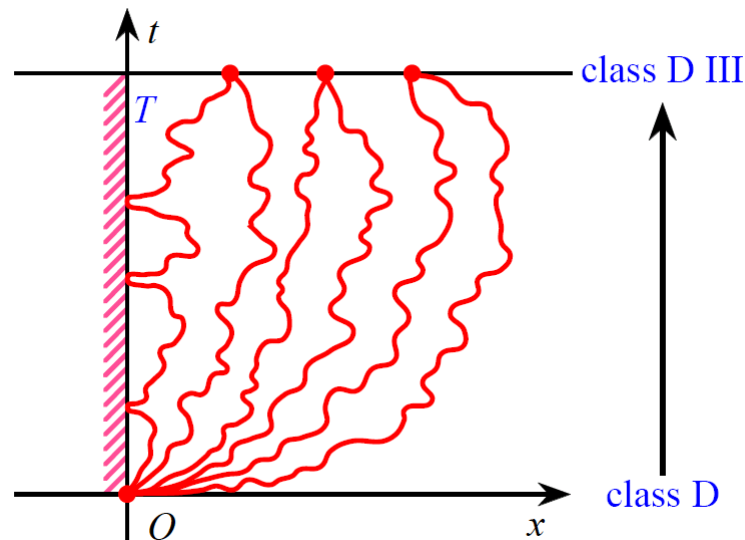
to the **“real” class D distribution**

$$q^D(0, \mathbf{x}; T, \mathbf{y}) \propto \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2T}\right\} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j^2 - y_i^2) \quad \text{at } t = T.$$



## 8.6 Banana Configurations with Reflection Wall

- Put a **reflection wall** at the origin.
- Consider the  $2N$  Brownian particles started from 0 in **Banana configurations**.



- For  $T < \infty$ , we can obtain a process showing a transition from the **class D distribution** of Altland and Zirnbauer

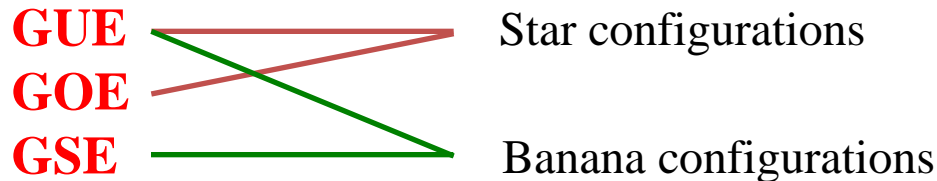
$$q^{D, \text{banana}}(0, \mathbf{x}; t, \mathbf{y}) \propto \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}|^2}{2t}\right\} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_j^2 - y_i^2)^2 \quad \text{for } 0 < t \ll T$$

To the **class DIII** distribution.

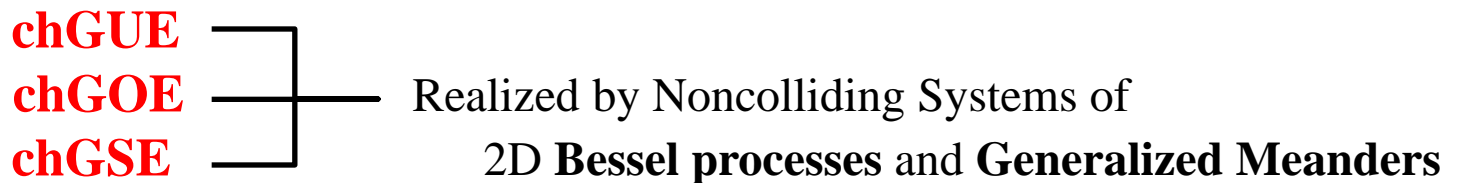
$$q^{D, \text{banana}}(0, \mathbf{x}; T, \mathbf{y}) \propto \exp\left\{-\frac{|\mathbf{y}^{\text{odd}}|^2}{T}\right\} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_{2j-1}^2 - y_{2i-1}^2)^4 \prod_{k=1}^N y_{2k-1} \quad \text{at } t = T.$$

- There are **10 CLASSES** of **Gaussian Random Matrix Theories**.

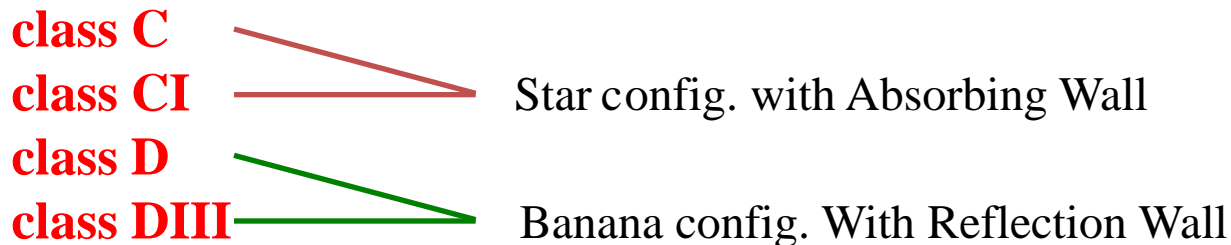
### Standard (Wigner-Dyson)



### Nonstandard (chiral random matrices) Particle Physics of QCD



### Nonstandard (Altland-Zirnbauer) Mesoscopic Physics with Superconductivity



**All** of the 10 eigenvalue-distributions can be realized by the **Noncolliding Diffusion Particle Systems (Vicious Walks)**.

See Katori and Tanemura : J.Math.Phys.(2004)

# 9:Future problems

## 9.1: $\beta$ が2でない Dyson's BM model と $\beta$ -Ensembles

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{k:k \neq j} \frac{1}{X_j(t) - X_k(t)} dt, \quad 1 \leq j \leq N$$

$\beta = 2 \iff$  Non - Colliding BM

$\beta \neq 2 \iff$  ???

**参考:**

**I. Dumitriu and A. Edelman:**

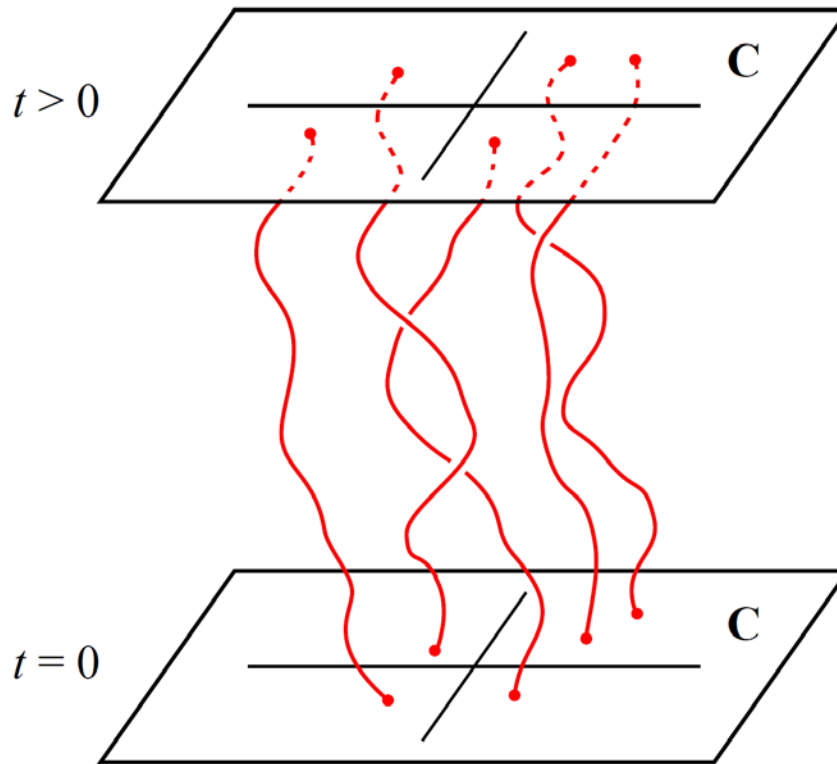
**Matrix models for beta-ensembles,**

***J. Math. Phys.* 43 (2002) 5830-5847**

©セルヒオ・アンドラウス君(香取研M1)

## 9. 2: 非エルミート・ランダム行列理論と確率過程

- 固有値  $\Rightarrow$  一般に複素数  
 $\Rightarrow$  複素平面  $\mathbb{C}$  上の多粒子系の構成  
(強い斥力相互作用)  
 $\Rightarrow$  SDE? Bruの定理のさらなる一般化?



## 9. 3: 非衝突過程から交通流モデルへ

**非衝突モデル** ⇒ 経路が衝突するような事象はサンプルから削除する.

**交通流モデル** ← 経路が衝突する場合は, 他の粒子の配置が変わって, 衝突しなくなるようになるまで, 待たせる.  
(**局所時間(local time)**の導入が必要.)

**G.M.Schutz: Exact Solution of the Master Equation  
for the Asymmetric Exclusion Process,  
*J. Stat.Phys.* 88 (1997) 427-445**

**ASEP と Schutz の行列式**

◎ 深澤 朋広君 (香取研M1)

## 9.4:行列サイズ無限大 $\Leftrightarrow$ 無限粒子系

### log-ポテンシャル系の非平衡統計力学・非平衡熱力学

ランダム行列理論と共に,  
Fredholm 行列式, 直交多項式, Painleve 方程式,  
entire functions,...などいろいろな数学と関連

Katori-Tanemura, *J. Stat. Phys.* **129** (2007) 1233-1277.

Katori-Tanemura, [arXiv:math.PR/0812.4108](https://arxiv.org/abs/math.PR/0812.4108) ;

(to appear in *Commun. Math. Phys.*).

Katori-Tanemura, [arXiv:math.PR/0906.3666](https://arxiv.org/abs/math.PR/0906.3666).

## 9.5: Bessel 過程の親類たちと統計力学・フラクタル物理

非衝突BM  $\Leftrightarrow$  Dyson's BM model with  $\beta=2$

$\leftarrow d=3$  (3次元) Bessel 過程

Schramm-Loewner Evolution (SLE):  $d$  vs  $\kappa$  (SLE のパラメータ)

$\Rightarrow$  (平面上の) 統計力学・フラクタル物理の 統一理論

(明日の講義をお楽しみに！)

◎佐藤史仁(香取研M2:SLE)

山崎純一(香取研M2:グラフ理論と統計力学模型)

副島佳緒里(香取研M1:sandpile model と spanning trees)