

数理物理の新展開 ーランダム行列とSLE

Part II.B: 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部 香取眞理(かとりまこと)

第54回 物性若手夏の学校 サブゼミ

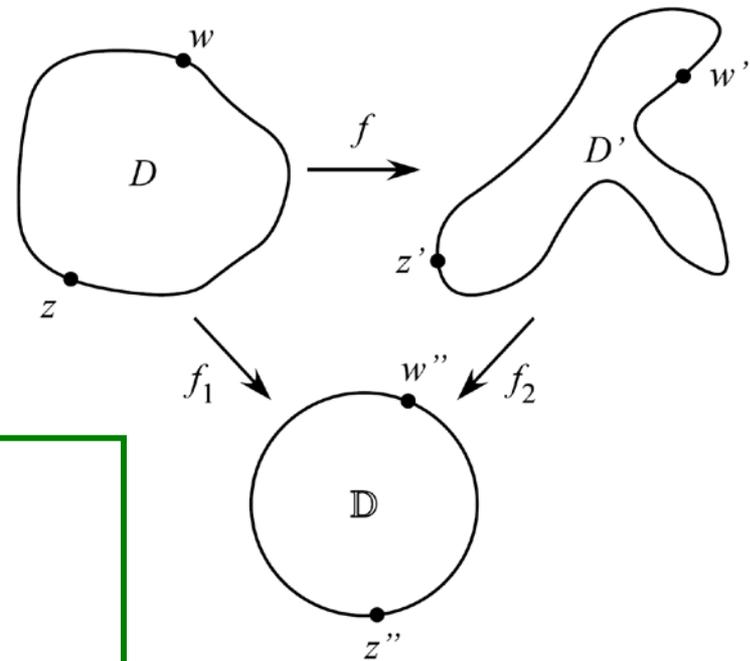
2009年8月22, 23日 長野県シャレードイン志賀

2. Schramm-Loewner Evolution (SLE)

2.1 Riemann の写像定理

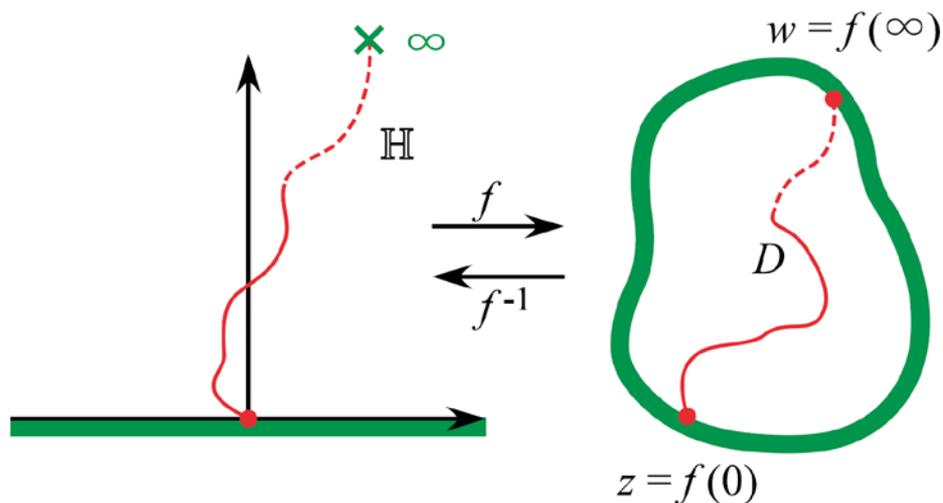
$D, D' : \mathbb{C}$ 上の単連結領域 (ただし, $D, D' \neq \mathbb{C}$)

$$z, w \in \partial D, \quad z', w' \in \partial D'$$



Riemann の写像定理

- $f : D \rightarrow D', f(z) = z', f(w) = w'$
となる共形変換の1 径数族が存在する.
- さらに $f'(w) = 1$ という条件を課すと, 共形変換は一意的に定まる.



- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$: 上半平面
- 共形不変な確率測度 $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$
 \implies 任意の単連結領域 $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$,
 $z, w \in \partial D$ に対する
 確率測度 $\mu_{(D; z, w)}$ が得られる

共形変換不変な測度の族 $\{\mu_{(D; z, w)}\}$ の代表元として $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$ を考える.

2.2 Loewner 方程式

$$\gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{H},$$

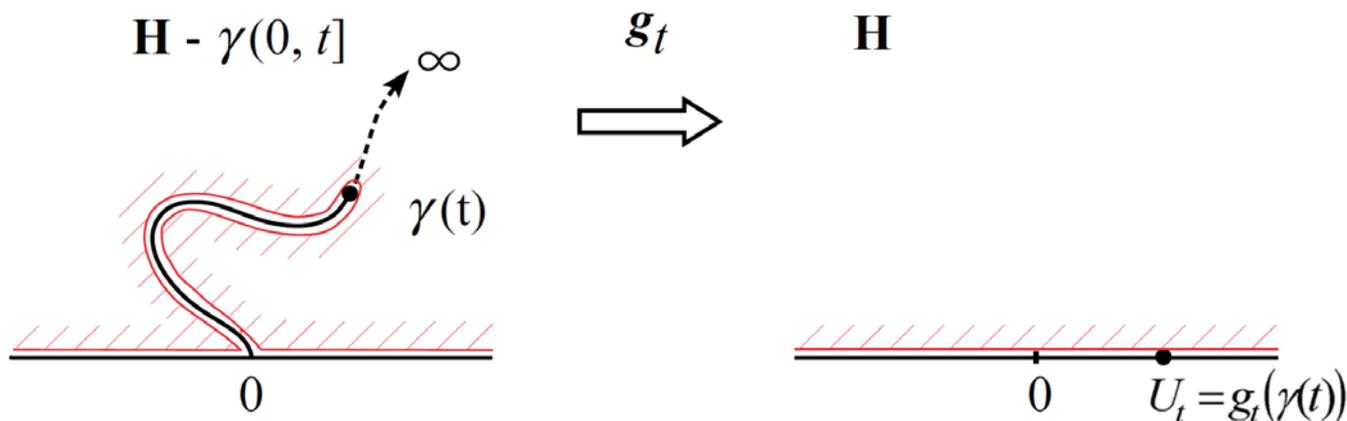
$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = U_0 \in \mathbb{R}$ から $\lim_{t \uparrow \infty} \gamma(t) = \infty$ に至る
ある一つの単純曲線.



各 $t \in (0, \infty)$ に対して

$\exists! g_t : \text{共形変換 } \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H},$

$$\text{s.t. } \lim_{z \rightarrow \infty} g_t'(z) = 1$$



$$g_t(z) = z + \frac{a(t)}{z} + \mathcal{O}(|z|^{-2}), \quad z \rightarrow \infty$$

と展開される.

$a(t) > 0$: $\gamma(0, t]$ の上半平面容量
(half-plane capacity).

$g_t(z)$ は (chordal) Loewner 方程式と呼ばれる次の微分方程式を満たす.

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{da(t)/dt}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z.$$

ただし, $U_t = g_t(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$. $t \rightarrow U_t$ は連続である.

- 各 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$T_z \equiv \sup \left\{ t > 0 : g_t(z) - U_t \neq 0 \right\}.$$

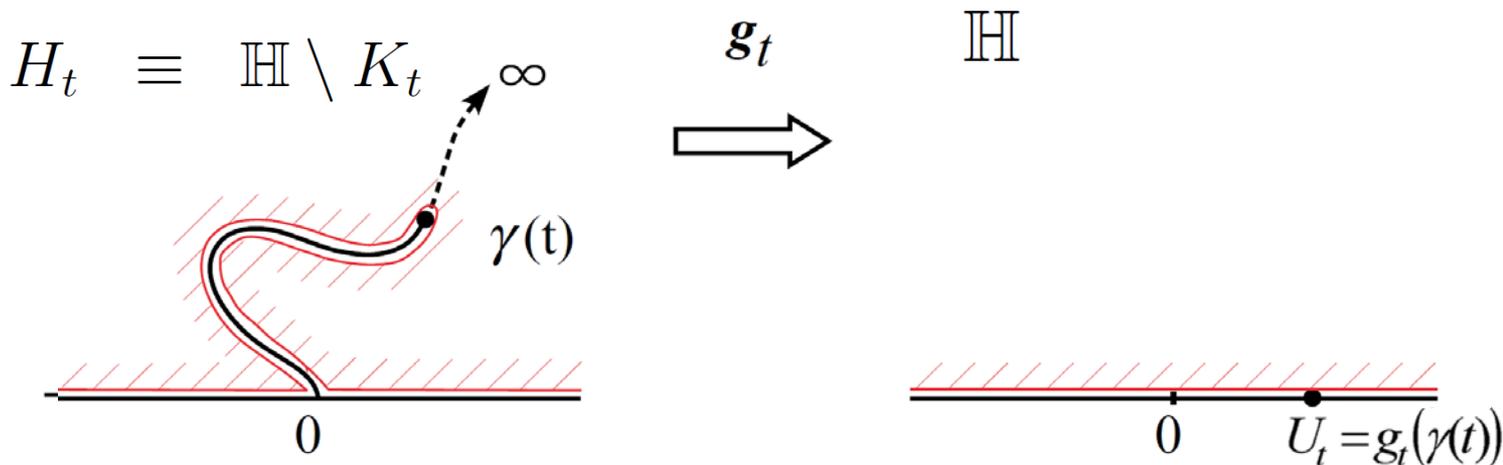
- 各時刻 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$K_t \equiv \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z \leq t \right\}.$$

$$H_t \equiv \mathbb{H} \setminus K_t:$$

時刻 t までは解ける領域 (定義域)

- 定義域 $H_t \subset \mathbb{H}$ は単調減少.



$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{da(t)/dt}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z.$$

- 各 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$T_z \equiv \sup \{t > 0 : g_t(z) - U_t \neq 0\}.$$

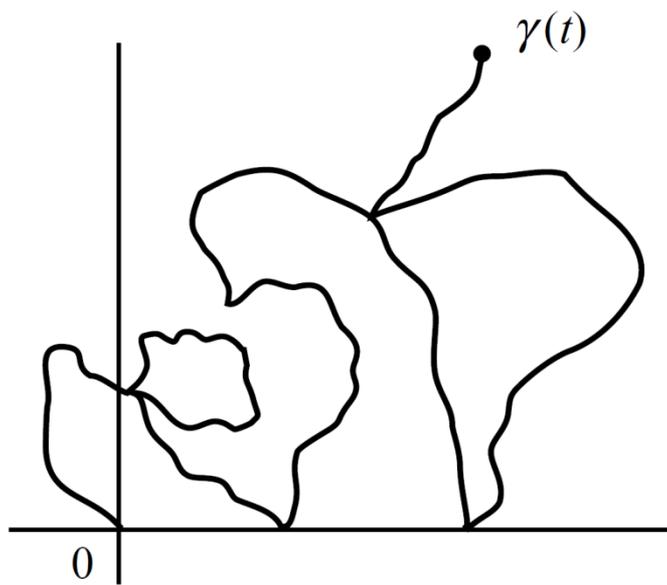
- 各時刻 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$K_t \equiv \{z \in \mathbb{H} : T_z \leq t\}.$$

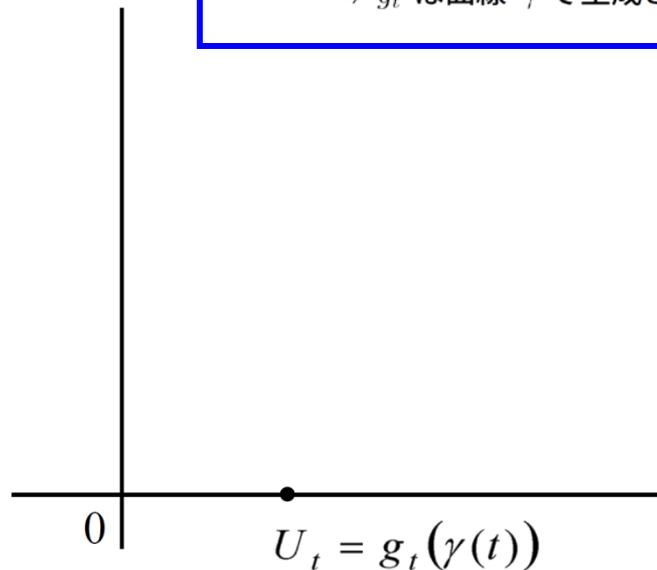
$$H_t \equiv \mathbb{H} \setminus K_t:$$

時刻 t までは解ける領域 (定義域)

- 定義域 $H_t \subset \mathbb{H}$ は単調減少.



g_t



逆に...

∇ 連続関数 U_t

∇ 1 回微分可能な関数 $a(t)$

↓ Loewner 方程式の解

共形変換の時間発展 $g_t : H_t \rightarrow \mathbb{H}, t \in (0, \infty)$

- H_t の pioneer point

$$H_t^{\text{pion}} = \bigcup_{0 \leq s < t} \partial H_s$$

- 曲線 $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$ s.t.

$$H_t^{\text{pion}} = \mathbb{R} \cup \gamma(0, t].$$

$\implies g_t$ は曲線 γ で生成された

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{da(t)/dt}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z.$$

- 各 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$T_z \equiv \sup \{t > 0 : g_t(z) - U_t \neq 0\}.$$

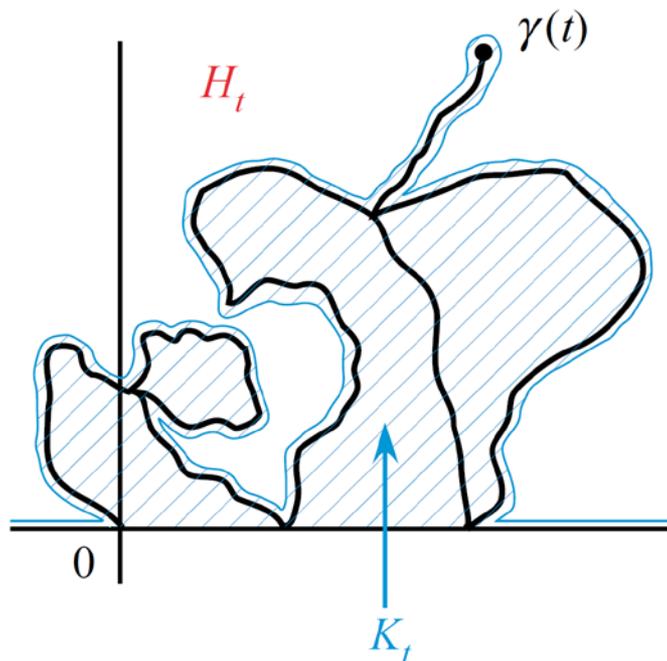
- 各時刻 $t \in [0, \infty)$ に対して

$$K_t \equiv \{z \in \mathbb{H} : T_z \leq t\}.$$

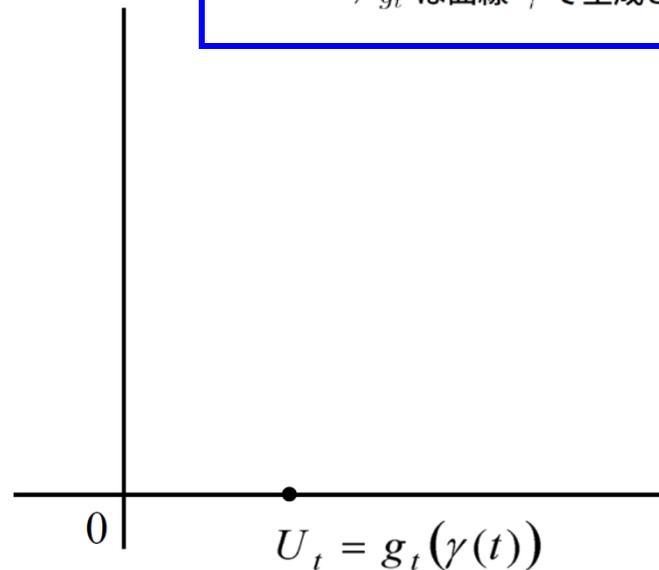
$$H_t \equiv \mathbb{H} \setminus K_t:$$

時刻 t までは解ける領域 (定義域)

- 定義域 $H_t \subset \mathbb{H}$ は単調減少.



g_t



逆に...

∇ 連続関数 U_t

∇ 1回微分可能な関数 $a(t)$

↓ Loewner 方程式の解

共形変換の時間発展 $g_t : H_t \rightarrow \mathbb{H}, t \in (0, \infty)$

- H_t の pioneer point

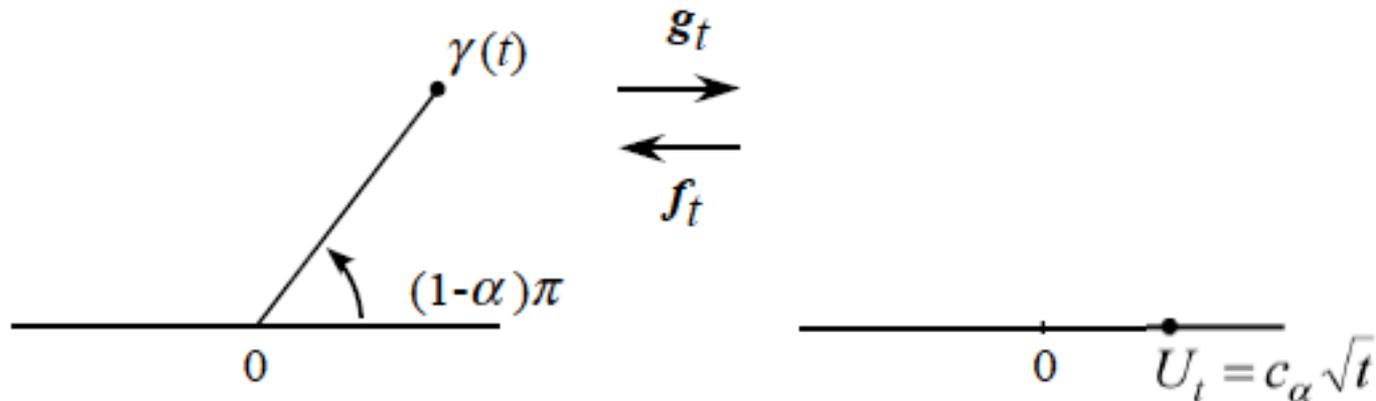
$$H^{\text{pion}} = \bigcup_{0 \leq s < t} \partial H_s$$

- 曲線 $\gamma : (0, \infty) \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$ s.t.

$$H_t^{\text{pion}} = \mathbb{R} \cup \gamma(0, t].$$

$\implies g_t$ は曲線 γ で生成された

例： $\gamma(t)$ が直線の場合（Schwarz-Christoffel 変換）



$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t} \quad \Leftrightarrow \quad f_t(z) \equiv g_t^{-1}(z), \quad \frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = -\frac{2}{z - U_t} \frac{\partial}{\partial z} f_t(z)$$

$$\gamma(t) = 2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha-1/2} e^{\sqrt{-1}\pi(1-\alpha)} \sqrt{t}, \quad 0 < \alpha < 1$$

\Updownarrow

$$U_t = \frac{2(2\alpha-1)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \sqrt{t}, \quad f_t(z) = \sqrt{\frac{4t}{\alpha(1-\alpha)}} \left[z \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{4t}} + (1-\alpha) \right]^\alpha \left[z \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{4t}} - \alpha \right]^{1-\alpha}$$

2.3 SLE κ

以下, 曲線 γ の径数付けによる違いは無視.

$a(t) = at, a = \text{定数} > 0$ とする.

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z$$

Loewner : 曲線 $\gamma(0, t]$ \implies 共形変換 $g_t \implies U_t = g(\gamma(t))$

Schramm : **逆問題** $U_t \implies$ 共形変換 $g_t \implies$ 曲線 $\gamma(0, t]$

ランダムネス U_t : 確率過程 \implies 共形変換 g_t の統計集団
 \implies 曲線 γ の統計集団 \iff 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$

Schramm の observation (2000)

$\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}$: 共形共変/共形不変 領域 Markov 性

↓

U_t は独立定常増分をもつ

$$[A] \quad U_t \perp (U_{t+s} - U_t), \quad \forall s, t > 0$$

$$[B] \quad (U_{t+s} - U_t) \stackrel{d}{=} U_t, \quad \forall s, t > 0$$

かつ, [C] U_t を連続な確率過程とする.

↓

$$U_t = c_1 B_t + c_2 t$$

$$B_t = 1 \text{ 次元標準 Brown 運動 } \stackrel{d}{=} N(0, t)$$

$$c_1, c_2 = \text{定数}$$

[D] 曲線 γ の径数付けの違い無視 $\implies c_1 = 1$ としてよい.

[E] 虚軸に対する左右対称性 $\implies c_2 = 0$ (ドリフト無し)

stochastic Loewner equation (SLE)

→ Schramm-Loewner Evolution (SLE)

$$\frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) - B_t}, \quad g_0(z) = z$$

a : 唯一の実パラメータ

Schramm: $a = \frac{2}{\kappa}, \quad \kappa \in (0, \infty) \implies \text{SLE}_\kappa$

- SLE_κ の解を生成する曲線 : SLE_κ 曲線 γ
- SLE_κ 曲線の測度 : SLE_κ 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^\kappa(\cdot)$

$$\iff \frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z,$$

$$U_t = \sqrt{\kappa}B_t = B_{\kappa t} \quad : \quad \kappa = \text{BM の一様な時間変更のスケール}$$

定理 2.1 [Lawler-Schramm-Werner]

連続関数空間上の測度で共形共変性と領域 Markov 性を持つものはすべて、
1 径数族である SLE_κ 測度, $\kappa \in (0, \infty)$ で与えられる。



Oded Schramm (December 10, 1961 in Jerusalem, Israel
– September 1, 2008, Washington State, USA)

$$\text{SLE}_\kappa : \quad \frac{d}{dt}g_t(z) = \frac{a}{g_t(z) - B_t}, \quad a = \frac{2}{\kappa}, \quad \kappa \in (0, \infty)$$

$$g_0(z) = z.$$

↓

$$h_t = g_t(z) - B_t, \quad z \in \mathbb{H} \quad \longrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$$

$$dh_t(x) = \frac{a}{h_t(x)}dt + dB_t, \quad h_0(x) = x > 0$$

$x > 0$ を出発点とする $d = 2a + 1 = \frac{4}{\kappa} + 1$ 次元 Bessel 過程.

Bessel flow に対する知見より, SLE κ 曲線は κ の値によって,

3 つの相 (phase) を持つことを示すことができる

定理 2.2 [Lawler-Schramm-Werner]

- (a) $0 < \kappa \leq 4$ のとき SLE κ 曲線 γ は単純曲線である.
また, 実軸に接することはない: $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$.
- (b) $\kappa > 4$ のときは γ は自己交差する.
また, $\gamma(0, \infty) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ である.
- (c) $\kappa \geq 8$ のとき γ は \mathbb{H} を埋めつくす:
 $\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}$.

SLE κ 曲線の3相(3態)

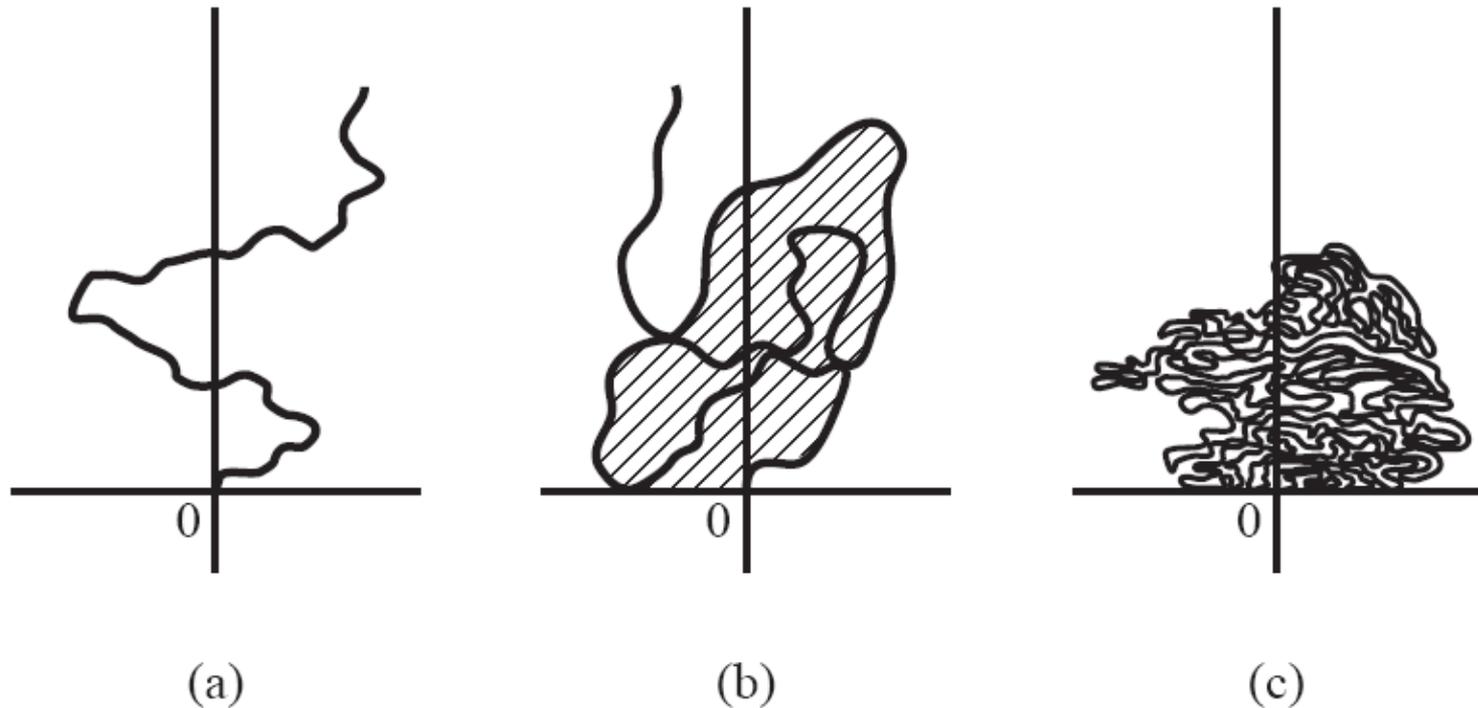


図 2: (a) 単純曲線. $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面を覆いつくしていくが, 曲線自身で半平面が埋めつくされることはない. $4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面を埋めつくしていく曲線. $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子.

d -次元ベッセル過程 (BES d)

d 次元ブラウン運動

$$\mathbf{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \dots, B_t^{(d)}) \in \mathbf{R}^d$$

$$dB_t^{(j)} dB_t^{(k)} = \delta_{jk} dt, \quad 1 \leq j, k \leq d$$

BES d (= \mathbf{B}_t の動径成分)

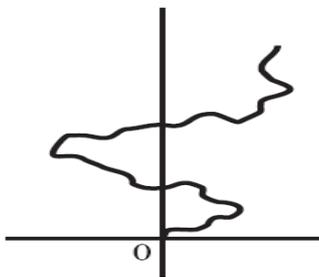
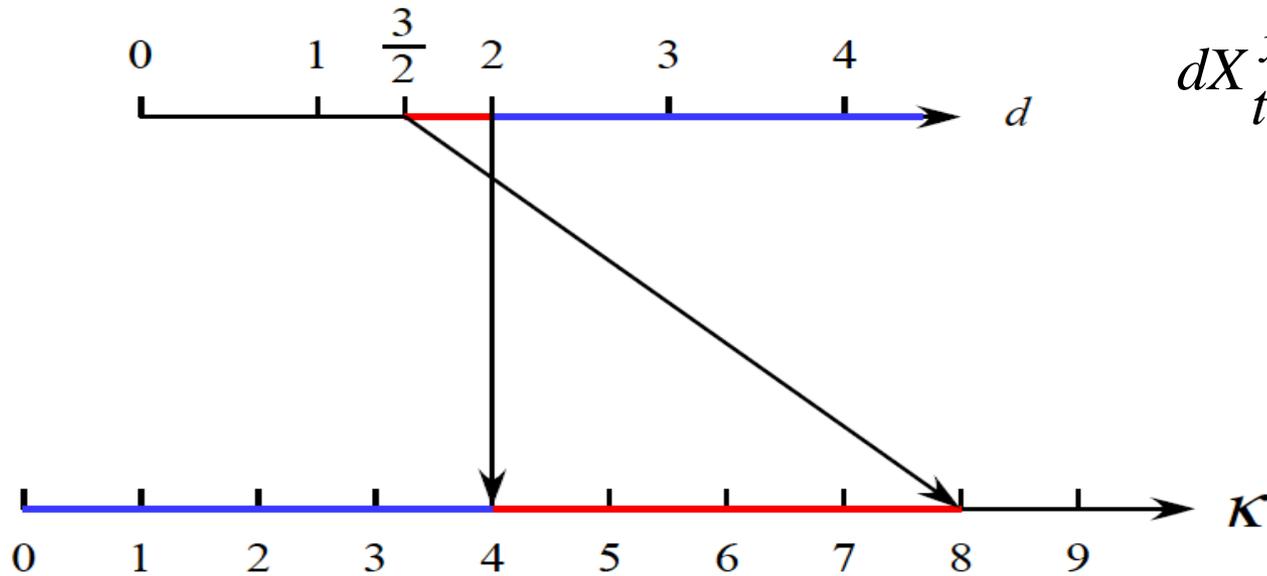
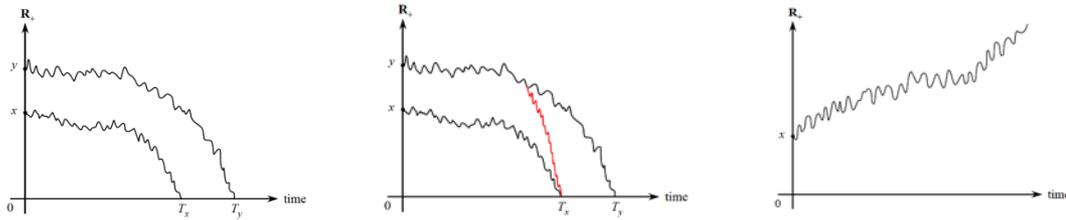
$$X_t \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^d (B_t^{(j)})^2} \in \mathbf{R}_+ \equiv \{x > 0: x \in \mathbf{R}\}$$

伊藤の公式により確率微分方程式(SDE)は次のように求まる

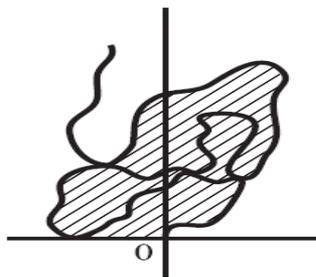
$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t}$$

d を1以上の連続変数とする.

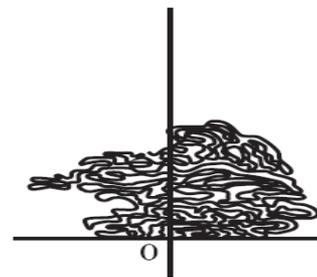
$$X_t^x \equiv X_0^x = x \in \mathbf{R}_+ \text{ の初期条件の下での解}$$



(a)



(b)



(c)

$$d\hat{g}_t(x) = dB_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{\hat{g}_t(x)}$$

$$dX_t^x = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x}$$

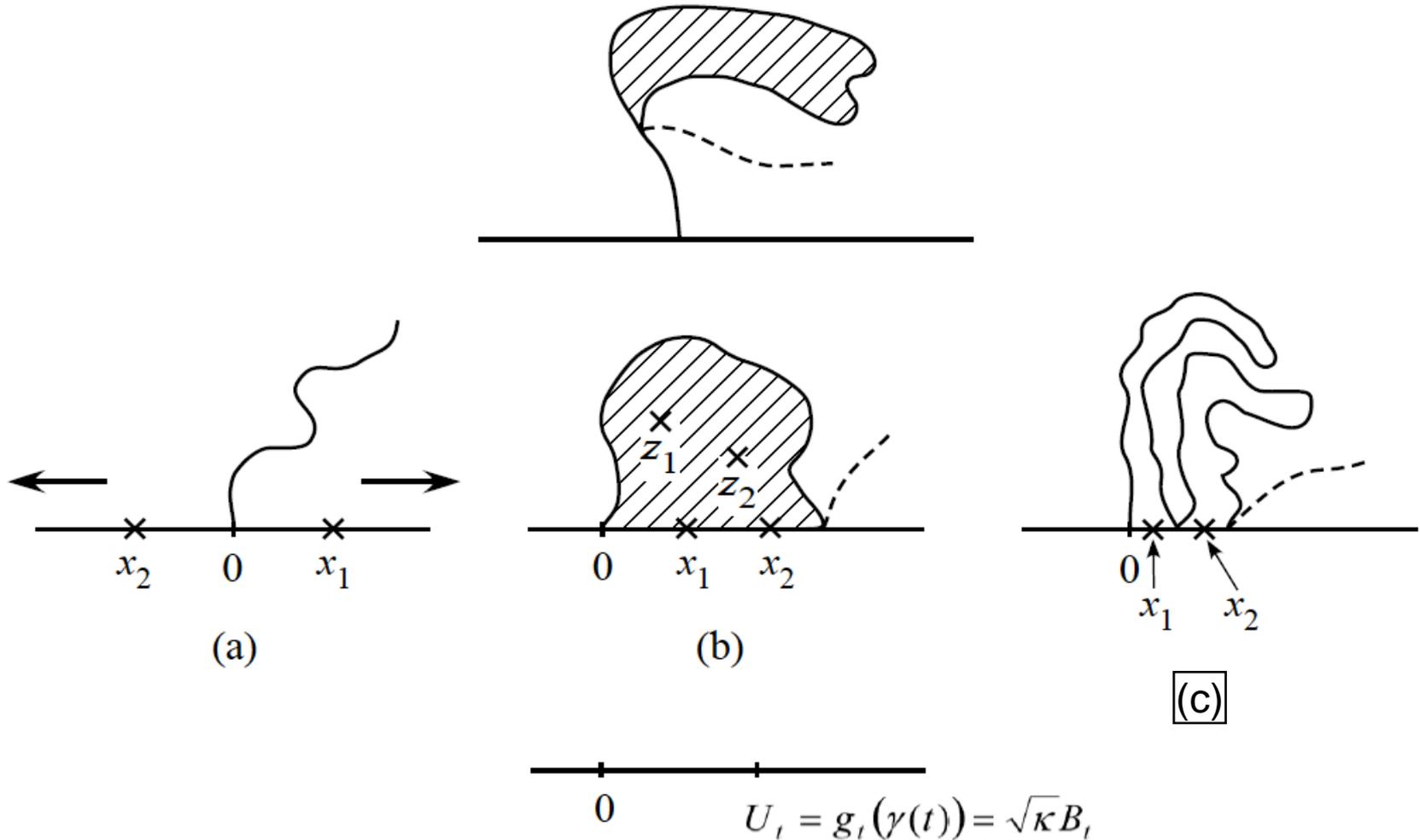
$$\frac{2}{\kappa} = \frac{d-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\kappa = \frac{4}{d-1}$$

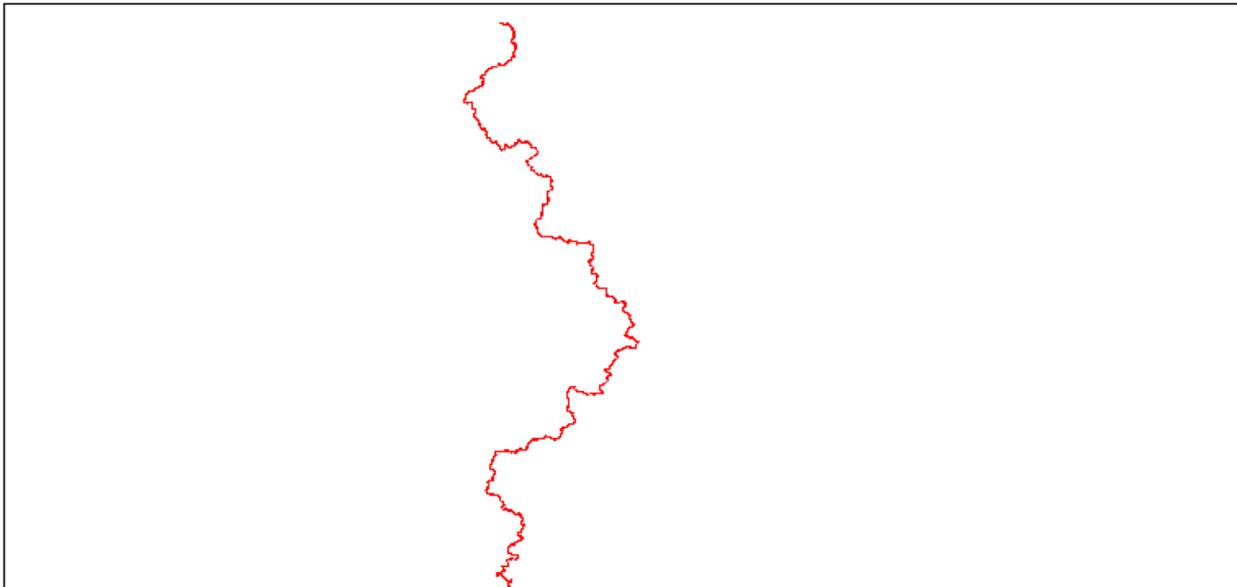
$$\Leftrightarrow$$

$$d = \frac{4}{\kappa} + 1$$

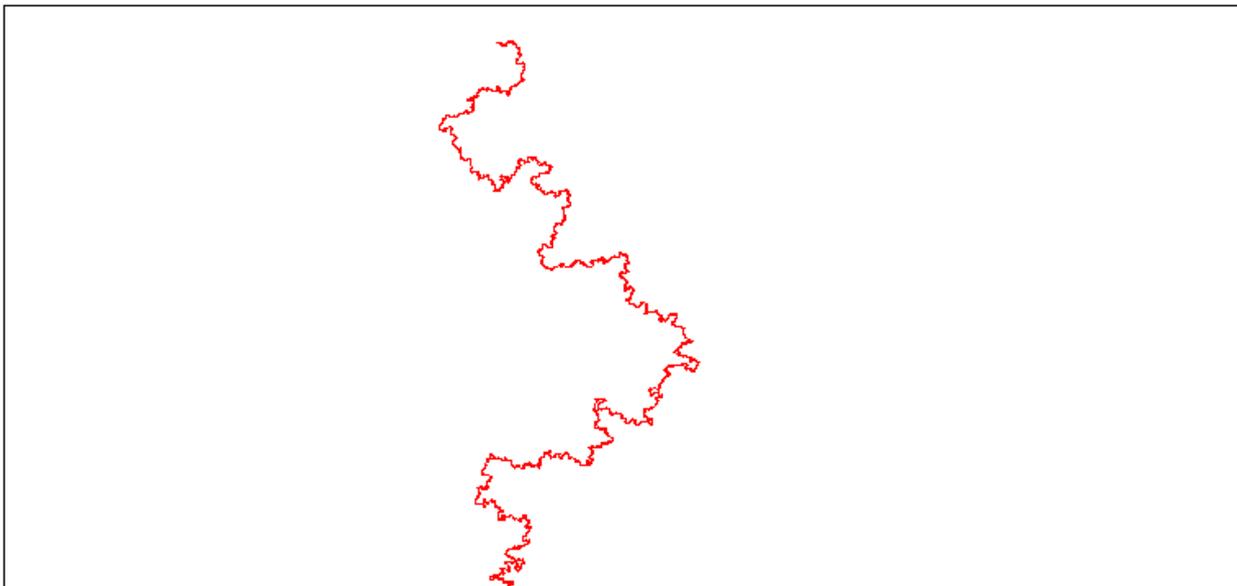


(b) の場合: $\gamma(t)$ が実軸 \mathbb{R} と接した瞬間に、斜線領域内の点はすべて同時に**呑み込まれて (swallowed)**, $\gamma(t)$ とともに U_t に写されてしまう。

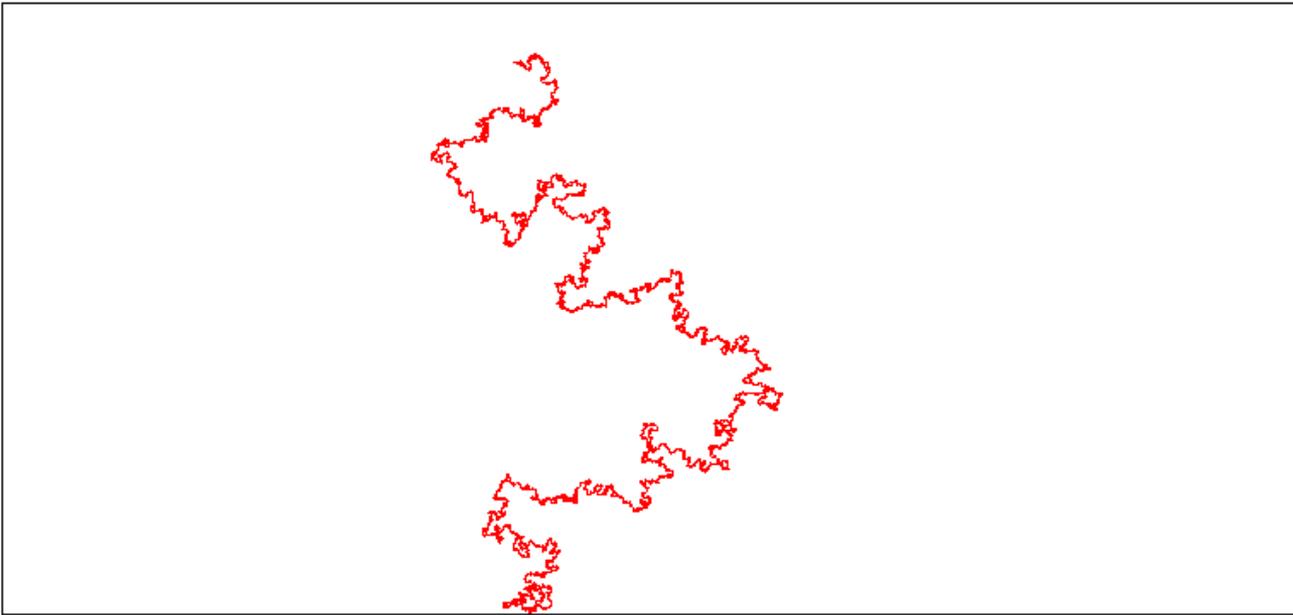
(c) の場合: γ には隙間はなく、実軸上の点 x_1, x_2, \dots は原点に近いものから順に U_t に写されていく。



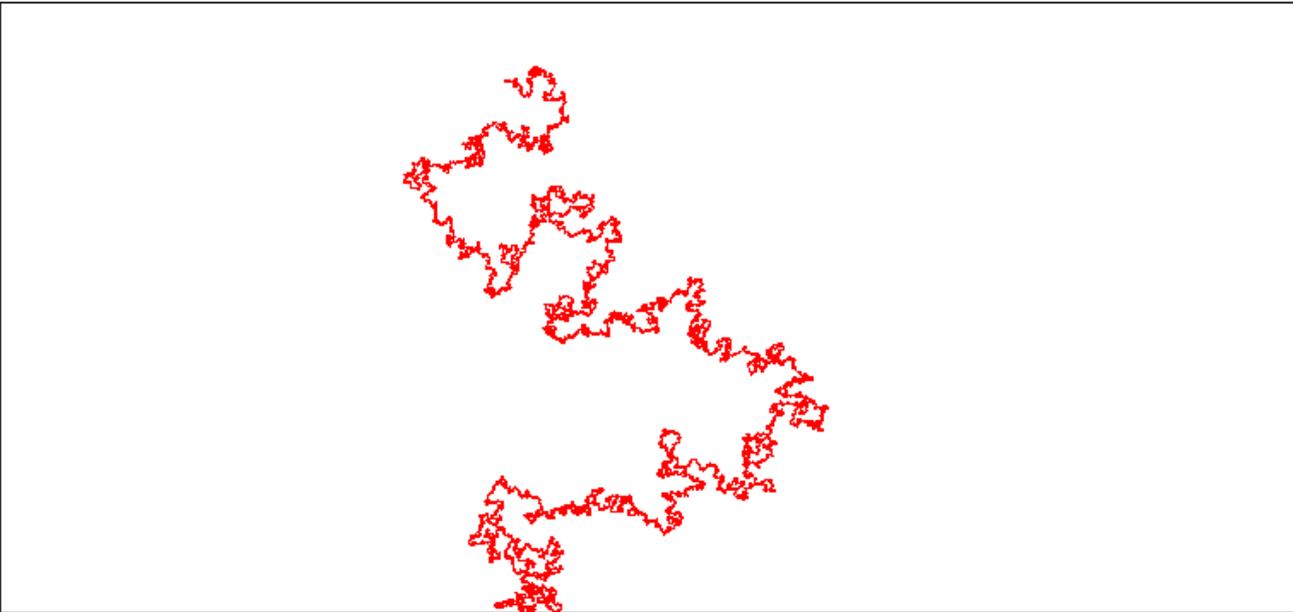
$$\kappa = 1.0$$



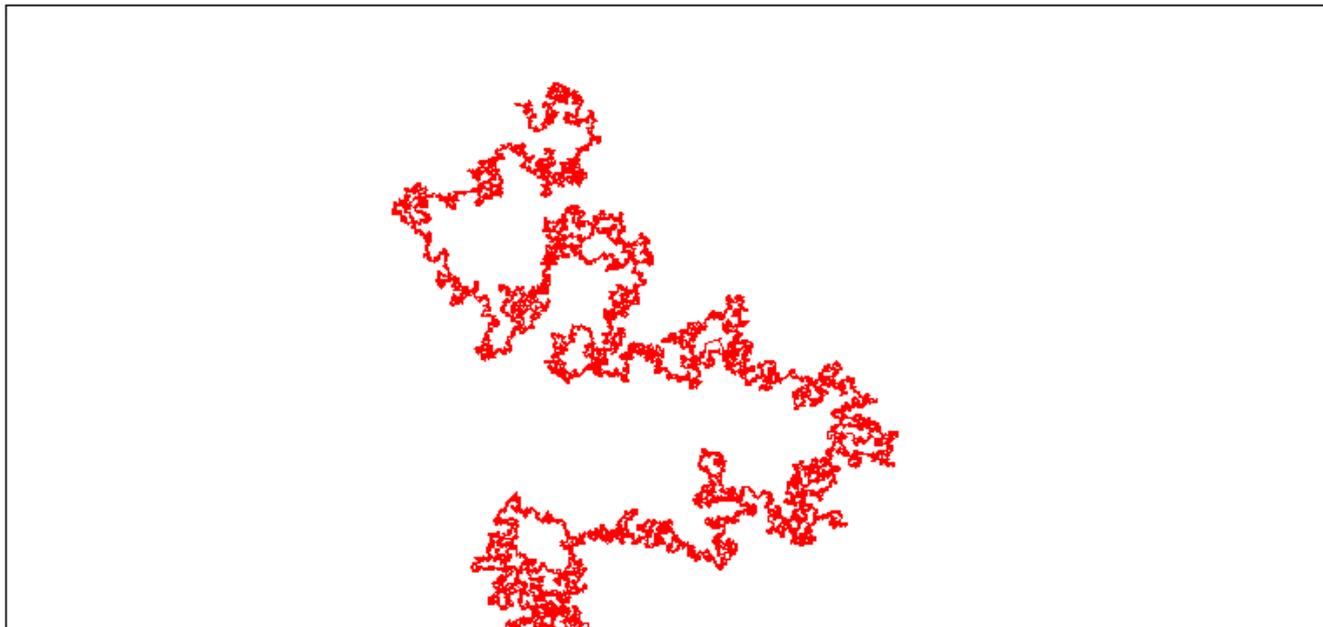
$$\kappa = 2.0$$



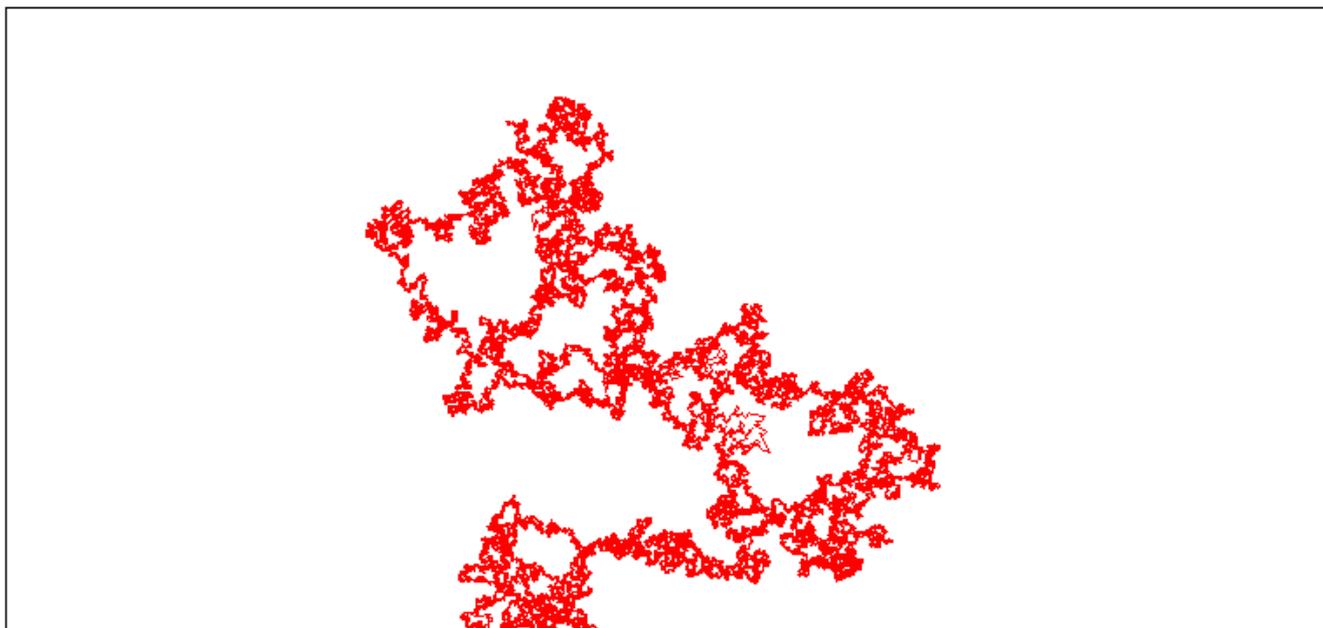
$$\kappa = 3.0$$



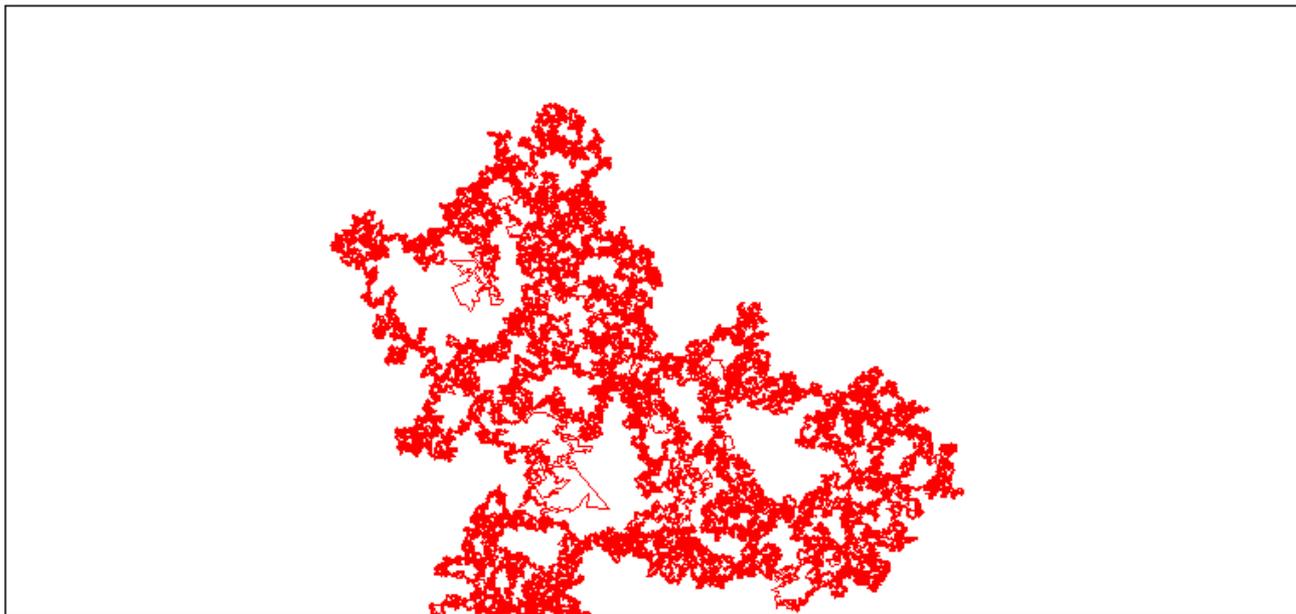
$$\kappa = 4.0$$



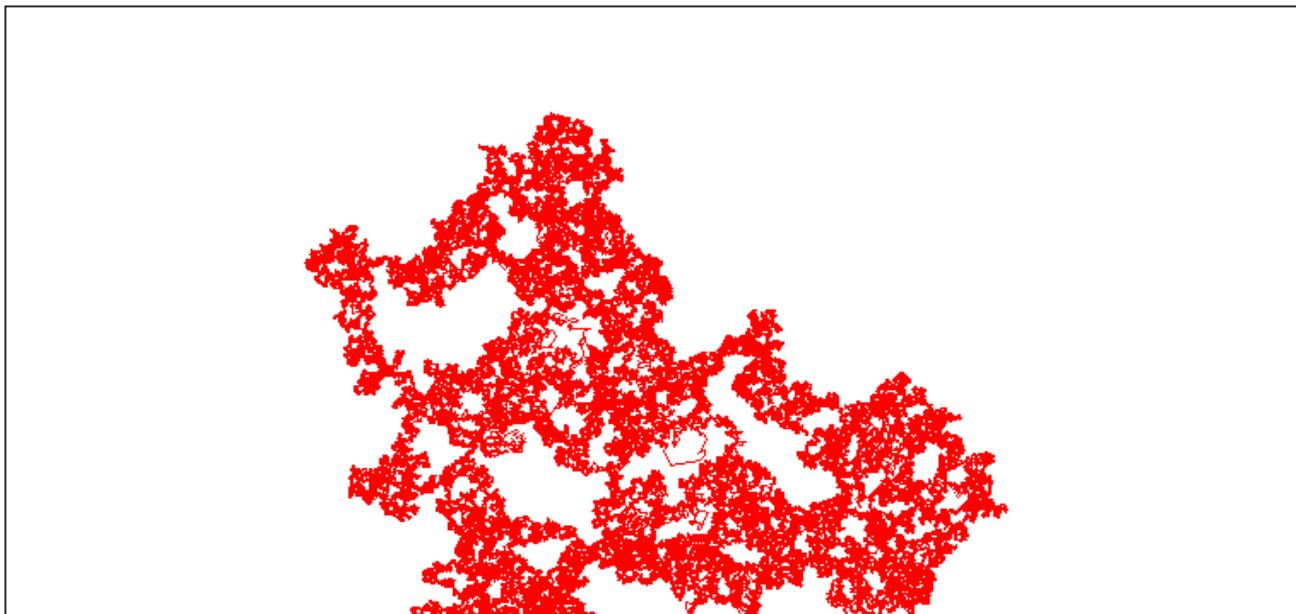
$$\kappa = 5.0$$



$$\kappa = 6.0$$



$$\kappa = 7.0$$



$$\kappa = 8.0$$

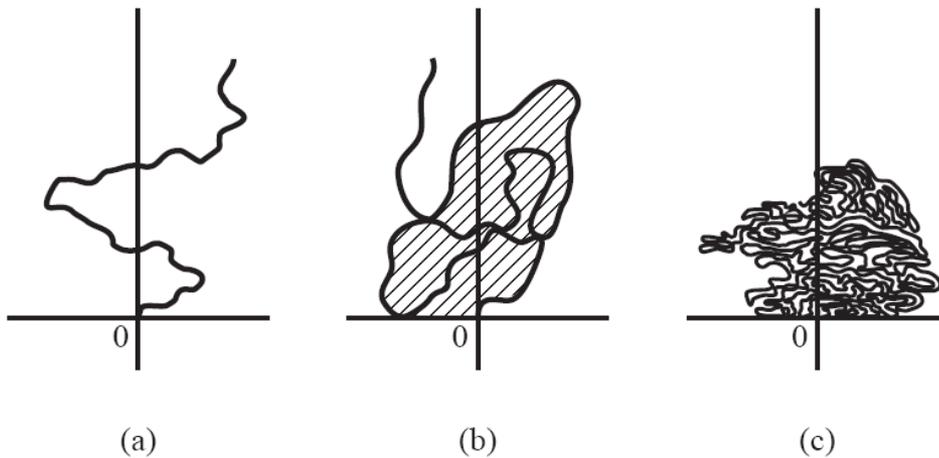


図 2: (a) 単純曲線. $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域(斜線部分)は上半平面を覆いつくしていくが, 曲線自身で半平面が埋めつくされることはない. $4 < \kappa < 8$ のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面を埋めつくしていく曲線. $\kappa \geq 8$ のときの SLE 曲線の様子.

$$(a) \quad 0 < \kappa \leq 4$$

$$(b) \quad 4 < \kappa < 8$$

$$(c) \quad \kappa \geq 8$$

さらに次が証明されている.

定理 2.3 [Beffara]

$\kappa \leq 8$ のとき SLE_{κ} 曲線 $\gamma(0, \infty)$ のフラクタル次元 (Hausdorff 次元) は

$$d(\kappa) = 1 + \frac{\kappa}{8}.$$

2.4 局所性と制限性

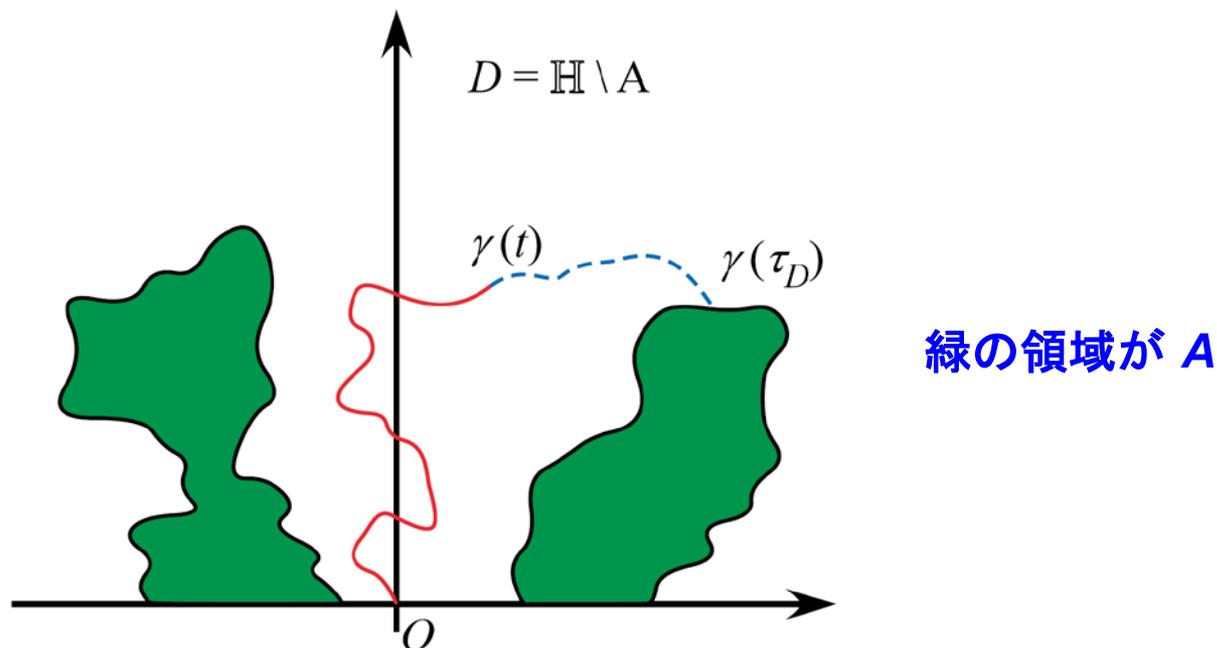
$$\mathcal{D} = \left\{ D \subset \mathbb{H} : \text{単連結}, \mathbb{H} \setminus D \text{ 有界}, \text{dist}(0, \mathbb{H} \setminus D) > 0 \right\}.$$

$D \in \mathcal{D}$ に対して

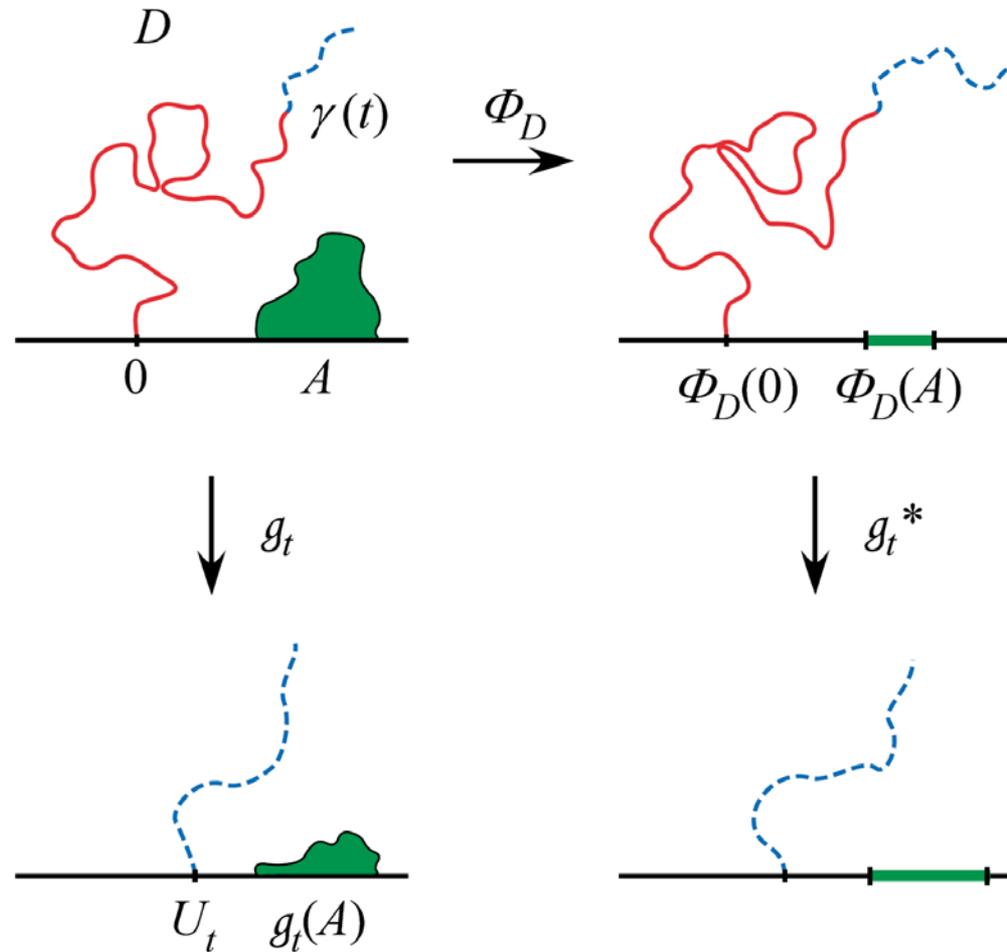
$$\exists! \Phi_D : \text{共形変換 s.t. } D \rightarrow \mathbb{H}, \quad \Phi_D(z) = z + o(1), z \rightarrow \infty.$$

SLE $_{\kappa}$ 曲線 γ に対して

$$\tau_D = \inf \left\{ t : \text{dist}(\gamma(t), \mathbb{H} \setminus D) = 0 \right\}.$$



$t < \tau_D$ の間は γ は部分領域 D 内に制限されている。



- $\gamma(0, \tau_D) \rightarrow \Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ は $\bar{\mathbb{H}}$ 内の曲線.
- $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$ の共形不変性 \implies 曲線 $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ で生成される $g_t^*(z)$ も Loewner 方程式に従うはず.

しかし、変換 Φ_D により曲線の径数付けに変更（時間変更）が生じる。

- $\gamma(0, \tau_D) \rightarrow \Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ は $\bar{\mathbb{H}}$ 内の曲線.
- $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$ の共形不変性 \implies 曲線 $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$ で生成される $g_t^*(z)$ も Loewner 方程式に従うはず.

しかし, 変換 Φ_D により曲線の径数付けに変更 (時間変更) が生じる.

$$\text{伊藤の公式} \implies \frac{d}{dt} g_t^*(z) = \frac{a}{g_t^*(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z,$$

$$dU_t = b \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} dt + dB_t.$$

$$\text{ただし } \Phi_t = \Phi_{D_t}, \quad D_t = g_t(D), \quad b(\kappa) = \frac{3a - 1}{2} = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}.$$

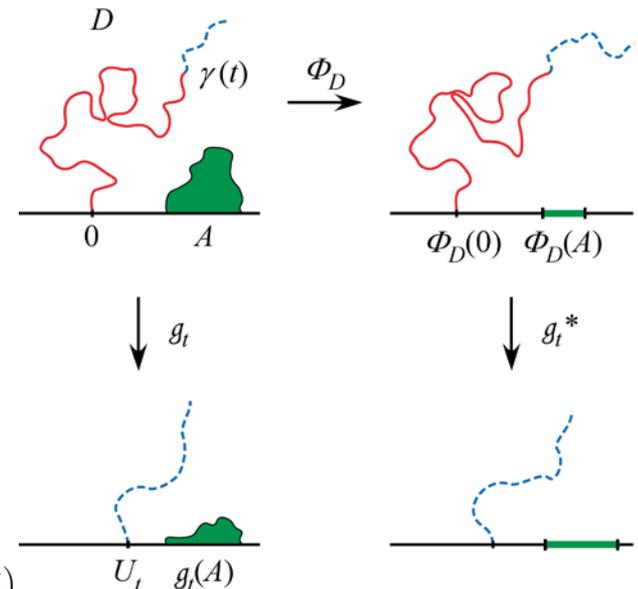
- $\kappa = 6$ のときに限り $b = 0$.

このときは, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

$g_t(z)$ も $g_t^*(z)$ も $t < \tau_D$ ではともに $U_t = B_t$ (1次元標準ブラウン運動)

で駆動される SLE を満たす.

つまり, 局所性が成り立つことになる.



定理 2.4 SLE $_\kappa$ 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$ は $\kappa = 6$ のときに限り局所性を持つ.

- $\kappa \neq 6$ のとき,

$$dU_t = b \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} dt + dB_t, \quad b(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa} \neq 0.$$

\implies ドリフト項 $\neq 0$, U_t はマルチンゲールではない.

Girsanov の定理 (Girsanov 変換) により

局所マルチンゲールが得られる:

$$M_t = \exp \left\{ -c \int_0^t \frac{a}{12} S\Phi_s(U_s) ds \right\} \Phi_t'(U_t)^b.$$

ただし,

$$Sf(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3f''(z)^2}{2f'(z)^2} \quad (\text{Schwarz 微分})$$

$$c = \frac{2b(3 - 4a)}{a} = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}.$$

実際

$$dM_t = -b \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} M_t dB_t.$$

- $\kappa = \frac{2}{a} \leq 4$, $D \in \mathcal{D}$ に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = M_\infty = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\} \exp \left\{ -c \int_0^\infty \frac{a}{12} S\Phi_s(U_s) ds \right\}.$$

- $\kappa \leq 4$ では $\kappa = \frac{8}{3}$ のときに限り, $c = 0$.

このとき,

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\}.$$

定理 2.5 SLE_κ 測度 $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^\kappa$ は $\kappa = \frac{8}{3}$ のときに限り制限性を持つ.

3. 対応関係

- $\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$ の共形不変性が証明されれば
 $\implies \mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}} = \mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$
- $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}$ の共形共変性が証明されれば
 $\implies \bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$

ただし、ここでの $=$ は共形変換によって変換できるという意味.

- 臨界浸透模型の連続極限の共形不変性 \iff (三角格子上のみ) Smirnov (2001)
- SAW の連続極限の共形共変性 \iff 未証明
- 次は証明されている :

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2 \quad (\text{Schramm (2000), Lawler-Schramm-Werner (2001)})$$

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3 \quad (\text{Smirnov(2007)})$$

3. 対応関係

- $\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$ の共形不変性が証明されれば

$$\implies \mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}} = \mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$$

- $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}$ の共形共変性が証明されれば

$$\implies \bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$$

ただし、ここでの $=$ は共形変換によって変換できるという意味.

- 臨界浸透模型の連続極限の共形不変性 \iff (三角格子上のみ) Smirnov (2001)

- SAW の連続極限の共形共変性 \iff 未証明

- 次は証明されている :

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2 \quad (\text{Schramm (2000), Lawler-Schramm-Werner (2001)})$$

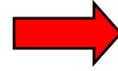
$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} = \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3 \quad (\text{Smirnov(2007)})$$

$$d = 1 + \frac{\kappa}{8}$$
$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$d_{\text{LERW}} = d(2) = \frac{5}{4}, \quad d_{\text{SAW}} = d(8/3) = \frac{4}{3}, \quad d_{\text{Ising}} = d(3) = \frac{11}{8}, \quad d_{\text{per}} = d(6) = \frac{7}{4},$$
$$b_{\text{LERW}} = b(2) = 1, \quad b_{\text{SAW}} = b(8/3) = \frac{5}{8}, \quad b_{\text{Ising}} = b(3) = \frac{1}{2}, \quad b_{\text{per}} = b(6) = 0.$$

$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$



$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$L_n|b\rangle = 0, n \geq 1, L_0|b\rangle = b|b\rangle$ となる固有値と固有ベクトルの対 $(b, |b\rangle)$ を導入.
最高ウェイト表現 $\mathcal{H}_b = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|b\rangle$ を考える.

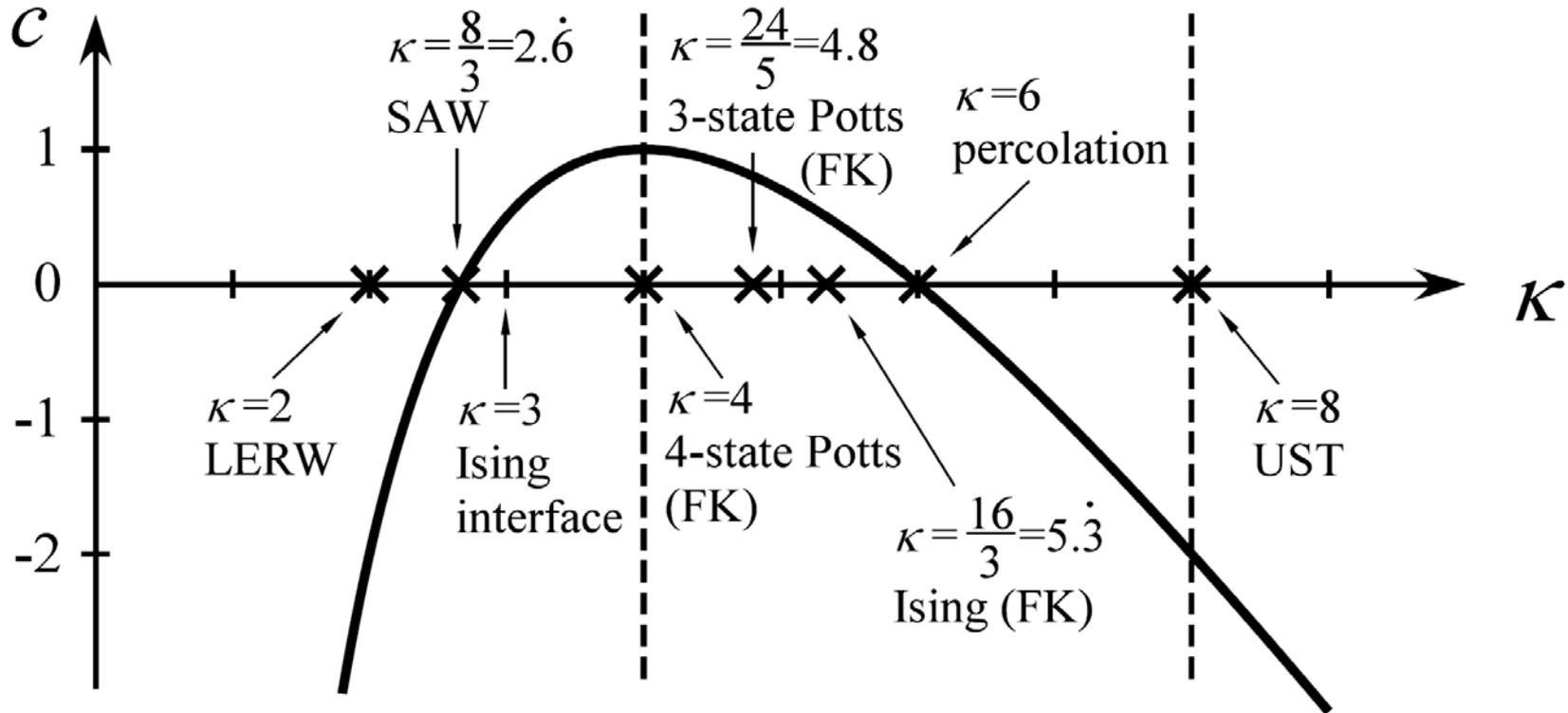
$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_1L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_1L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b + c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1 + 2b) \end{pmatrix} = 0$$

となるとき、**レベル 2 の退化表現**が得られる (Kac 公式).

$b \neq 0$ とすると、この条件式は

$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

に等しい



- SLE 曲線の径数 κ と中心電荷 c との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の κ の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.

4. 今後の課題

[1] SLE_{κ} の基礎理論の整備

$U_t=B_t \rightarrow$ filtration, Bessel flow $\Leftrightarrow SLE_{\kappa}$
可逆性, 双対性, 径数付けについて

[2] SLE_{κ} 曲線の研究と SLE_{κ} の拡張

$SLE(\kappa, \rho)$, multiple SLE, \dots

[3] 統計力学模型の連続極限 (フラクタル曲線) の同定

SAW, Ising 模型, Potts 模型, $O(N)$ 模型, \dots

DLA, height models, Coulomb gas, \dots

(なぜ, 特定の κ の値が物理のモデルを実現するのか?)

universality class の確率論的な意味づけ.)

[4] 共形場理論との対応

共形場 (多点) 相関関数 \Leftrightarrow (多点) マルチンゲール

(Cardy's formula, Schramm-Zhou's 2pt martingale)

共形場理論の再構築

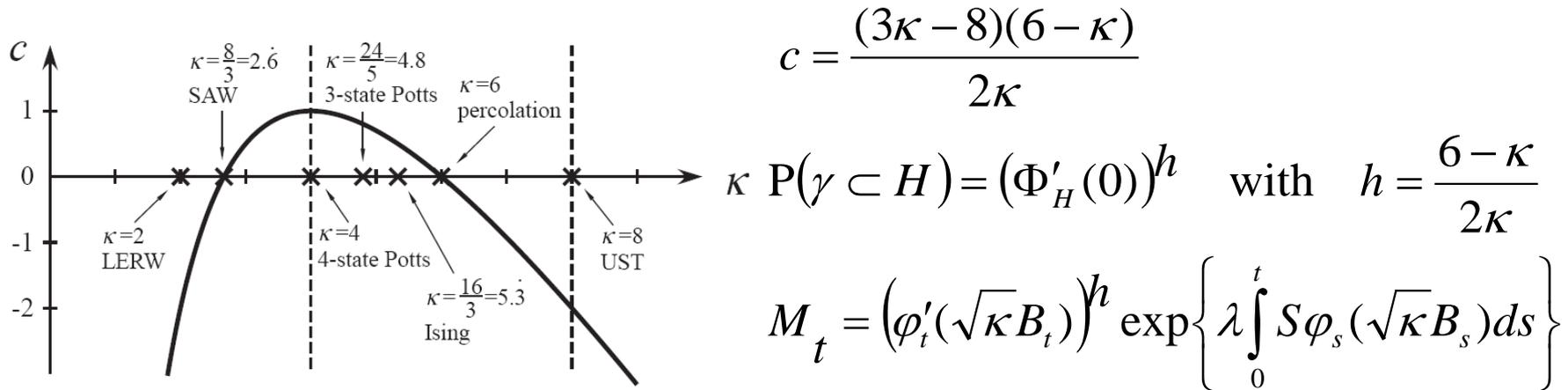


図 4: 2次元格子上のフラクタル曲線の連続極限が特定の κ の値の SLE 曲線で実現される. LERW は Loop Erased Random Walk, UST は平面上一様ランダムな全域木のグラフ (Uniform Spanning Trees) を表す. 平面を埋めつくすペアノ曲線を UST から得る方法が知られている. 中心電荷 c の値を縦軸にとって (8) 式もプロットした.

$\kappa < 8/3$ のとき $\Rightarrow h > 5/8 \Rightarrow \gamma$ をより「太らせればよい」

SLE κ 曲線 γ に Brownian loop を密度 λ で付加する
(Lawler, Schramm, Werner (2003), Friedrich and Werner (2003))

ストレス・テンソルの確率論的な意味づけ (これが出来るのは $c < 0$ の場合)

数値計算によるSLE研究

共形不変と思われる曲線を, 数値的に描かせたSLE曲線と比較することにより, κ の値を予測する.

[格子模型] Picco, Santachiara, Numerical study on SLE in nonminimal conformal field theories, PRL **100** (2008).

[乱流] Bernard, Inverse turbulent cascades and conformally invariant curves, PRL **98** (2007). **SQG: surface quasigeostrophic turbulence.**

Zero temperature isolines ··· **SLE₄**

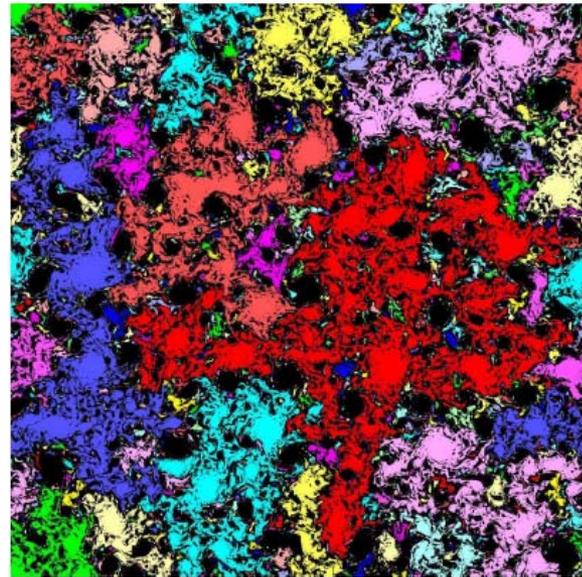


FIG. 2 (color online). Temperature clusters in the inverse cascade of SQG turbulence. These are connected domains with positive temperature. Negative temperature regions are black.

[**スピングラス**] Amoruso et al., Conformal invariance and SLE in two-dimensional spin glasses, PRL **97** (2006).

[**height model**] Sabari et al., Conformal curves on the WO_3 surface, PRL **100** (2008). 酸化タングステン表面
Isoheight lines ... **SLE₃**

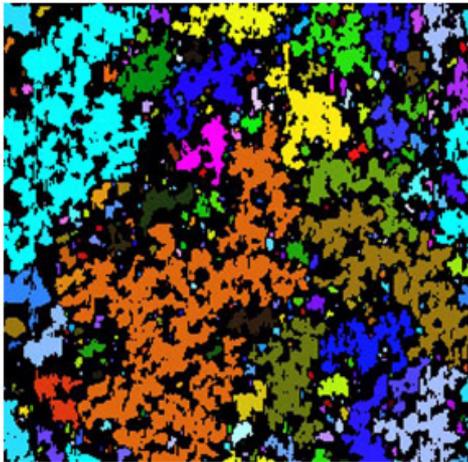


FIG. 2 (color online). The connected domains with positive heights on the WO_3 surface. Negative height regions are black.

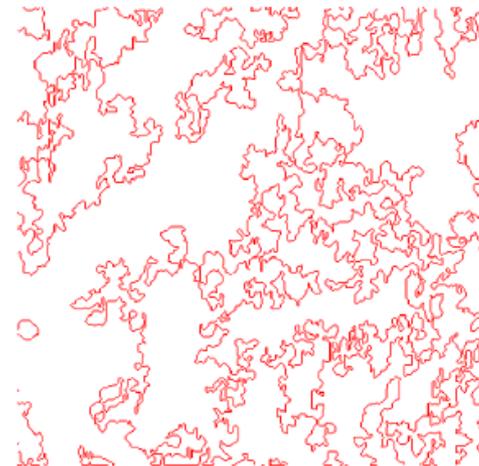


FIG. 3 (color online). Some of the positive height cluster boundaries on a WO_3 surface (see also Fig. 2).

おわりに

- 2次元格子上の統計物理模型の臨界現象
2次元格子模型のフラクタル・パターン
⇒連続(スケーリング)極限, 共形場の理論
 - ブラウン運動
(マルコフ性, スケーリング性, マルチンゲール性)
⇒ベッセル過程, 複素ブラウン運動, SLE
[昨日の話題: ランダム行列, 非交差経路, 非衝突拡散過程]
- 複雑系と複素系 (complex systems): 反還元論
- 粒子系の確率法則・確率過程
⇒曲線(道, 経路)の確率法則・確率過程