

# 砂山崩しモデル

香取研究室

河原陽明

錦織志菜

湯浅亮平

砂山を作るとき、どんなに高く鋭い山を作ろうと思っても、ある程度積み上げると雪崩が起こり、思い通りの砂山を作ることはできません。その様子を再現するために考案されたのが、砂山崩しモデルです。

## 〈モデルの説明〉

N個のサイトxからなる有限格子を考える。各サイトに砂ブロックを積んでいき、その高さをZ(x)で表わす。各サイトごとに、しきい値Zc(x) (これ以上積めないという限界値)を設定する。すべてのサイトでZ(x) < Zc(x)を満たした配置を安定配置、Z(x) ≥ Zc(x)となるサイトが一つでも存在する配置を不安定配置という。

### ●時間発展のルール

- ① サイトxをランダムに選び、選んだx' に砂ブロックを1つ追加する。... Z(x') → Z(x') + 1
- ② ①の結果、安定配置ならば①に戻り、不安定配置ならば③へ進む。
- ③ 砂ブロックの数がしきい値を超えて積みあがってしまったサイトxは、周りのサイトに砂ブロックを落とす。(このように、あるサイトの砂ブロックが隣のサイトに転げ落ちることをtopplingという。)ただし、考えているサイトの隣にサイトがないときは、ブロックが落ちると無くなってしまうことにする。toppling後に再び不安定配置となってしまうときは③を繰り返し、安定配置となったら①に戻る。

## 〈topplingの可換性〉

不安定サイトが複数あるとき、どのサイトからtopplingさせても、結果として得られる配置はひとつに定まる。この性質をtopplingの可換性という。

## 〈過渡的配置と再帰的配置〉

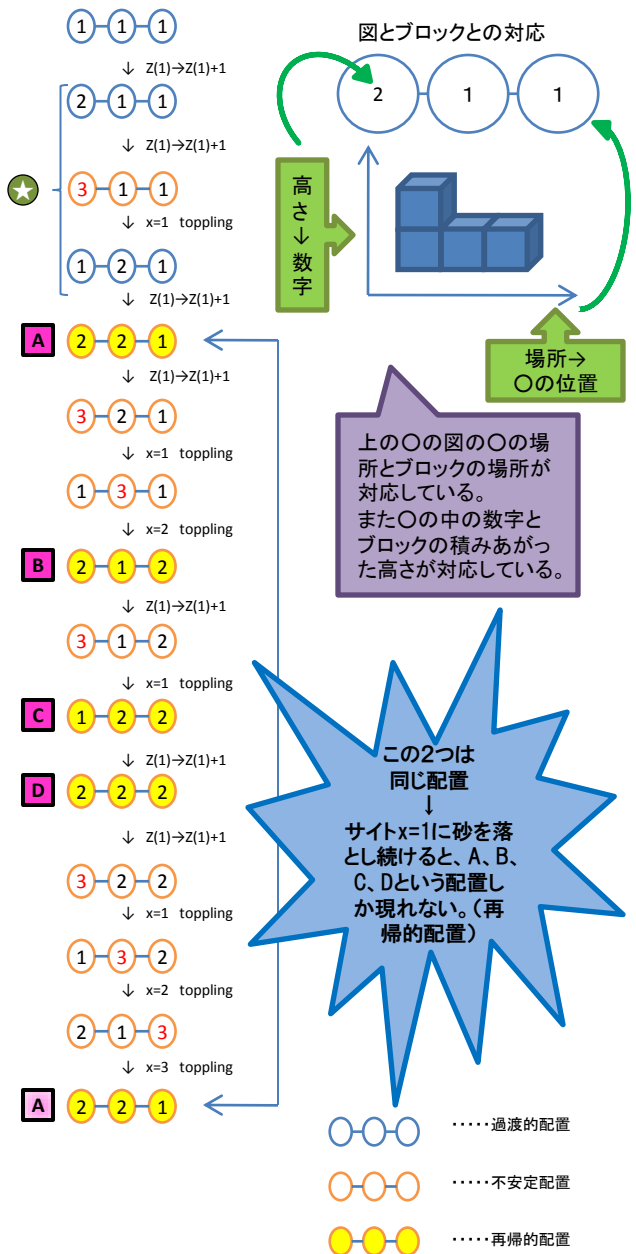
安定配置には、過渡的配置と再帰的配置の2種類がある。一度再帰的配置をとると、それ以降は再帰的配置しかとらず、過渡的配置はでてこない。

## Example: 1次元のモデル(N=3)

Zc(x)=3,

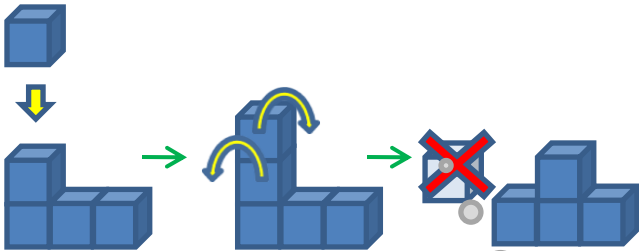
$$\Delta(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。ここでは簡単のため、サイトx=1のみに砂ブロックを落として、配置の変化をみていく。



### Toppling (トッピング) の例

★の過程をブロックで表すと...



崩れる!

ブロック  
落とす

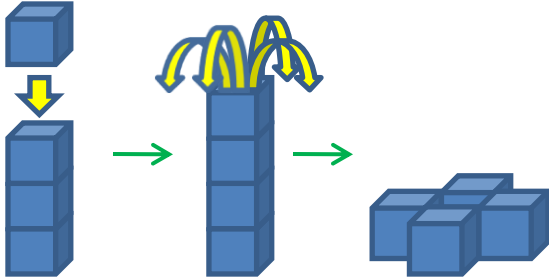
ブロック  
無くなる

# 砂山崩しモデルの性質

## 2次元での場合



2次元にサイトが広がる場合、広がりは方形や正方形のように異なった広がりを考えることができる。下のtopplingはサイトが正方形で広がってるものを考えている。下のグラフでも2次元のものを考えてシミュレーションを行った。



2次元でのtopplingは4方向に崩れる。

## 砂山のイメージ写真



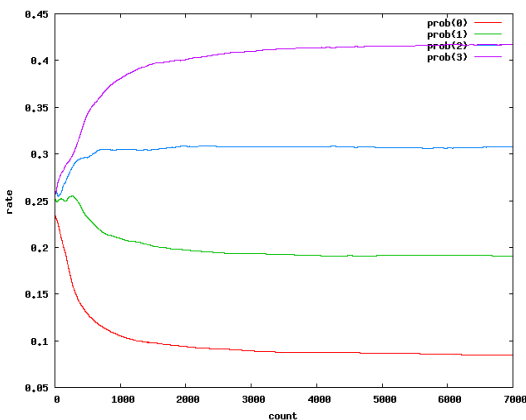
## 〈モデルの性質〉

### ●自己組織化臨界性

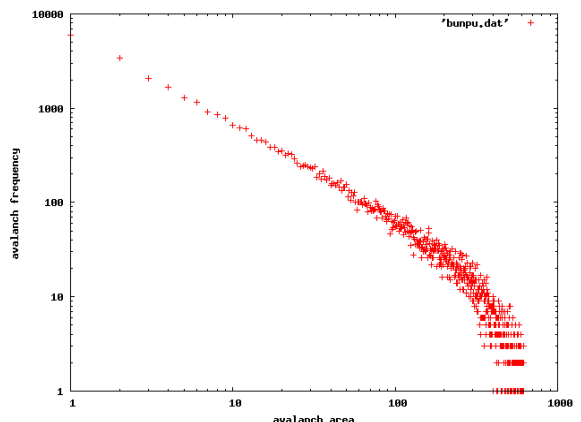
この性質を表わすモデルのひとつとして、砂山崩しのモデルがあげられる。自己組織化とは、外部からのコントロールを受けることなく自発的に構造を形成し、秩序だった状態に発展していくことである。自己組織化臨界性は自然界に多く見られる。地震の発生頻度や都市と人口の関係などがその例である。臨界点を超えると砂山が崩れ、それがランダムな各点で起こるが、それを繰り返すことにより秩序だった構造が生まれる。

### ●べき乗則

べき乗則とは、小さな変化が起こる頻度は高いが、極端な変化が起こる頻度は低いということを表わすものである。砂山崩しのモデルはこれに従っているため、砂山が崩れるなだれ現象が、継続して起こる回数(時間)が多い(長い)ほど、頻度が低くなっている。また、なだれ現象が伝わった範囲が広いほど、頻度が低いという関係もある。両対数グラフでプロットした図を見ると、べき乗則によって示される直線関係がおおむね表われている。無限系ではこの分布に従うと考えられる。



X軸を砂を落とした数、Y軸を全格子上的砂山の高さの割合としてグラフ化した。グラフよりサイト上の砂山の高さが砂を落としてトッピングが起こることによって一定の割合に落ち着くことが分かる。(図では25×25の2次元正方形格子で15000回試行の中の7000回分までを表示した。)



X軸に雪崩の起こった面積、Y軸にその面積Xを持つ雪崩が起こった回数を両対数プロットした。グラフ先の方が折れ曲がっているが、理論的には格子サイズを無限大にしたときには綺麗な直線になる。(図は2次元25×25の正方形格子で100000回試行をした。)