確率的 Löwner 方程式入門

香取眞理（中央大学理工学部）

21 March 2006 (version 1)

1　複素上半面内の道の hull と共形写像

•

$$\mathbb{H} \equiv \text{複素上半面} = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{I}m\, z > 0\}$$

時刻 $t = 0$ に原点をスタートした点 $\gamma(t), t \geq 0$ が $\overline{\mathbb{H}}$ 内に連続な道 (path) を描くものとする．$\gamma(t)$ は，自分自身や実軸と衝突できるが，衝突は "瞬間的" であるとする．

時間区間 $[0, t]$ に $\gamma(t)$ が描いた道を $\gamma[0, t]$ を記すことにする．次のように定義する (図 1 参照).

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0, t] \text{ の非有界な連結領域} \\ K_t &= \overline{\mathbb{H} \setminus H_t} \ \cdots \ \text{これを道 } \gamma[0, t] \text{ の } \textbf{hull} \text{ とよぶ} \end{aligned}$$

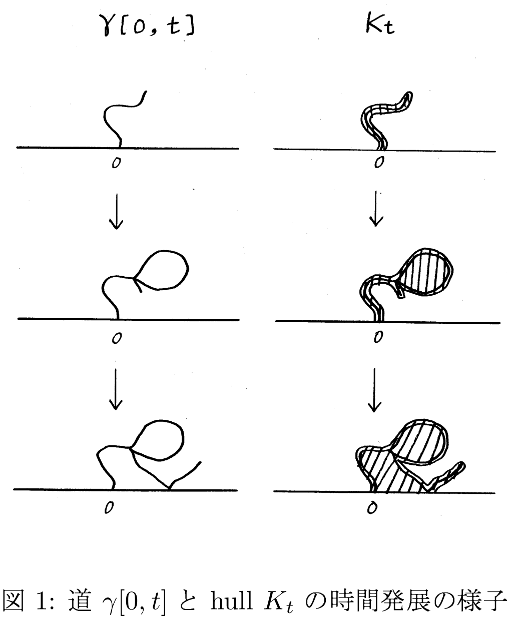

図 1: 道 $\gamma[0, t]$ と hull K_t の時間発展の様子

- 各時刻 $t \in [0,\infty)$ において，$\mathbb{H} \setminus K_t$ は $\mathbb{C}$ 内の単純連結領域なので，**Riemann の写像定理**により

$$\mathbb{H} \setminus K_t \quad \mapsto \quad \mathbb{D} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \ (\text{単位円板})$$

なる共形写像が存在する．また

$$\text{共形写像} \quad f(w) = \sqrt{-1}\frac{1+w}{1-w} \quad \text{によって} \quad w \in \mathbb{D} \mapsto f(w) \in \mathbb{H} \quad \text{に写像される}$$

($\mathbb{D}$ の中心である原点は $z = \sqrt{-1}$ に写る) ので，この二つの合成写像として $g_{K_t} : \mathbb{H} \setminus K_t \mapsto \mathbb{H}$ なる共形写像が与えられる (図 2 参照).

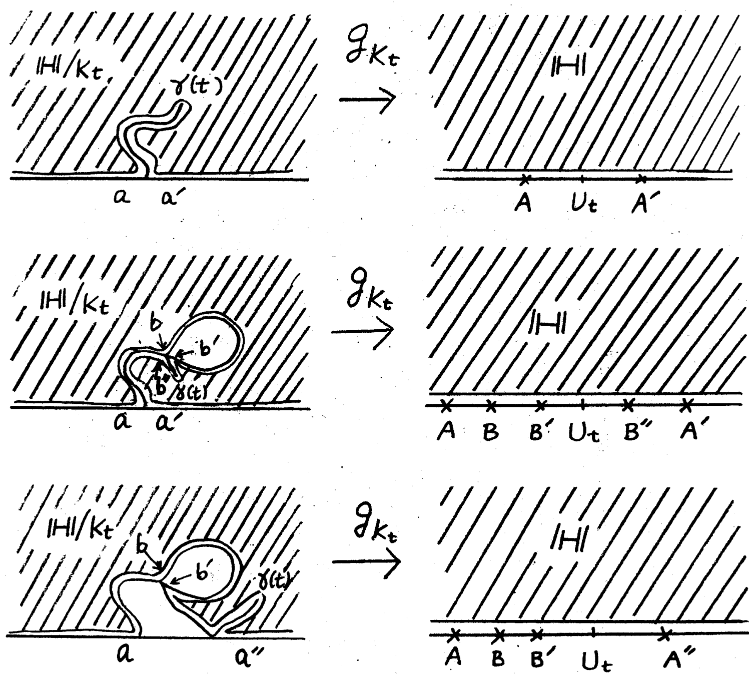

図 2: 共形写像 g_{K_t} の時間発展の様子．道の先端 $\gamma(t)$ は実軸上の点 $U_t \equiv g_{K_t}(\gamma(t))$ に写る．$A = g_{K_t}(a), A' = g_{K_t}(a')$ などとした．

- 以下しばらく t は固定して，K_t を単に K と記すことにする．$g_K : \mathbb{H} \setminus K \mapsto \mathbb{H}$ として，無限遠点 ∞ を無限遠点 ∞ に写すものを選ぶことにする．するとこれは，$z = \infty$ の周りで

$$g_K(z) = b(K)z + a_0(K) + \frac{a_1(K)}{z} + \frac{a_2(K)}{z^2} + \cdots$$

と展開できる．$z^n, n \geq 2$ の項がないのは，像 $g_K(z) \in \mathbb{H}$ であるため: $0 < \theta < \pi$ として $z = r\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{H}$ とすると，$z^n = r^n e^{\sqrt{-1}n\theta}$ であるので，一般には $z^n \notin \mathbb{H}, n \geq 2$ である．

g_K によって $\mathbb{R} \setminus K \mapsto \mathbb{R}$ であるから，$z \in \mathbb{H} \setminus K$ を実軸上のに点 $z_0 \in \mathbb{R}$ に近づけると $\mathcal{I}m\, g_K(z) \to 0$ となる．このような共形写像 $g_K : \mathbb{H} \setminus K \mapsto \mathbb{H}$ は，**Schwarz の鏡像の原理**によって，$g_{K^*} : \mathbb{C} \setminus K^* \mapsto \mathbb{C}$

に解析接続できる．ただしここで $K^* = \{z : z \in K \text{ or } \overline{z} \in K\}$ である．このとき，

$$g_{K^*}(\overline{z}) = \overline{g_{K^*}(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus K^*$$

が成り立つ (図 3 参照)．このことから，上の展開係数 $b(K), a_0(K), a_1(K), \cdots \in \mathbb{R}$ が結論される．

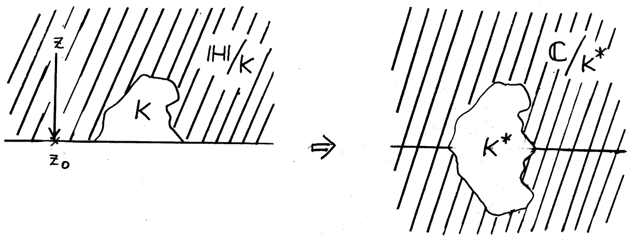

図 3: Schwarz の鏡像の原理の図.

- Möbius 変換:

$$f(z) = \frac{\widetilde{a}z + \widetilde{b}}{\widetilde{c}z + \widetilde{d}} \qquad z \in \mathbb{H}, \quad \widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}, \widetilde{d} \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{a}\widetilde{d} - \widetilde{b}\widetilde{c} > 0$$

は $\mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ の共形写像である．特に $\widetilde{c} = 0, \widetilde{d} = 1$ とおくと $f(z) = \widetilde{a}z + \widetilde{b}$ であり，

$$\begin{aligned} f \circ g_K(z) &= \widetilde{a}\Big(b(K)z + a_0(K) + \frac{a_1(K)}{z} + \frac{a_2(K)}{z^2} + \cdots\Big) + \widetilde{b} \\ &= (\widetilde{a}b(K))z + (\widetilde{a}a_0(K) + \widetilde{b}) + \frac{\widetilde{a}a_1(K)}{z} + \frac{\widetilde{a}a_2(K)}{z^2} + \cdots \end{aligned}$$

となる．そこで, 与えられた g_K に対して

$$\widetilde{a} = \frac{1}{b(K)}, \quad \widetilde{b} = -\widetilde{a}a_0(K) = -\frac{a_0(K)}{b(K)}$$

となるように Möbius 変換 f を選び，$f \circ g_K(z)$ を改めて $g_K(z)$ とすると，

$$g_K(z) = z + \frac{a_1(K)}{z} + \frac{a_2(K)}{z^2} + \cdots \tag{1.1}$$

と展開できることになる．

（これを「**流体力学的正規化条件** (hydrodynamic normalization)

$$\lim_{z \to \infty} \Big(g_K(z) - z\Big) = 0$$

を満たすように g_K を選ぶ」という.)

以下では常に，g_K として上のような共形写像を選ぶことにする．そうすると， $K \in \overline{\mathbb{H}}$ に対して g_K が unique に定まることになる．

- $a_1(K)$ は hull K の **capacity** とよばれる．次を証明することができる．(証明を付録 A に与えた．)

正値性　　$a_1(K) > 0$

スケーリング則　　任意の $r > 0$ に対して $a_1(rK) = r^2 a_1(K)$

加法性　　$J \subset K \subset \overline{\mathbb{H}}$ のとき，$L = \overline{g_J(K \setminus J)}$ とすると，　$a_1(K) = a_1(J) + a_1(L)$.

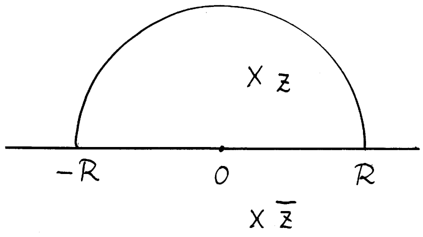

図 4: 複素積分の経路の図.

- Cauchy の積分公式を図 4 のように $C =$ 半径 R の上半円周 $\cup [-R, R]$ に適用する．z を C 内の点とすると, $\overline{z} \notin C$ なので，C 内で正則な関数 f に対して，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{1.2}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - \overline{z}} d\xi \tag{1.3}$$

が得られる．$|z| \to \infty$ で $f(z) \to 0$ であるとすると，$R \to \infty$ で $\displaystyle\oint_C d\xi \to \int_{-\infty}^{\infty} d\xi$ となるから，この極限で (1.2) と (1.3) はそれぞれ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - z} \Big\{ \mathcal{R}e\, f(\xi) + \sqrt{-1} \mathcal{I}m\, f(\xi) \Big\} d\xi \tag{1.4}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi - \overline{z}} \Big\{ \mathcal{R}e\, f(\xi) + \sqrt{-1} \mathcal{I}m\, f(\xi) \Big\} d\xi \tag{1.5}$$

となる．(1.5) の複素共役をとり (1.4) と辺々加えると

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{I}m\, f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \mathbb{H}$$

という公式が得られる ($\mathbb{H}$ **に対する Poisson の積分公式**).

- いま $g_K : \mathbb{H} \setminus K \mapsto \mathbb{H}$ の逆写像を $g_K^{-1} : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H} \setminus K$ と書くことにして，上の積分公式で $f(z) = z - g_K^{-1}(z)$ とおくことにする．$\xi \in \mathbb{R}$ のとき $\mathcal{I}m\, f(\xi) = \mathcal{I}m\, \xi - \mathcal{I}m\, g_K^{-1}(\xi) = -\mathcal{I}m\, g_K^{-1}(\xi)$ なので，

$$z - g_K^{-1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{I}m\, g_K^{-1}(\xi)}{z - \xi} d\xi \tag{1.6}$$

両辺に z をかけると

$$z^2 - z g_K^{-1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z - \xi} \mathcal{I}m\, g_K^{-1}(\xi) d\xi$$

を得るが，この $z \to \infty$ の極限を考えると

$$g_K(z) = z + \frac{a_1(K)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad g_K^{-1}(z) = z - \frac{a_1(K)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

であるから，

$$(\text{左辺}) = z^2 - z g_K^{-1}(z) = z^2 - z^2 + a_1(K) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \longrightarrow \quad a_1(K)$$

したがって，

$$a_1(K) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{I}m\, g_K^{-1}(\xi) d\xi \tag{1.7}$$

という capacity に対する積分表示が得られる．

2 Löwner 方程式の導出

hull $K_t = \overline{\mathbb{H} \setminus H_t}, t > 0$ は時間とともに増大し，したがって $a_1(K)$ の加法性より $a_1(K_t)$ の値も t ともに増大する．($\lim_{t\to\infty} a_1(K_t) = \infty$ である.) $\gamma(t)$ のパラメータである時刻 t のスケールのとり方に任意性があるが，上述の $a_1(K)$ のスケーリング則があるので，時間スケールのとり方を固定しても議論の一般性は失われない．以下では，

$$a_1(K_t) = 2t, \quad t \in [0, \infty) \tag{2.1}$$

となるように，$\gamma(t)$ の時間パラメータ t を定めることにする．

以下では $g_t \equiv g_{K_t}$ と書くことにする．また

$$U_t \equiv g_t(\gamma(t))$$

とする．$\gamma(t)$ は道 $\gamma[0,t]$ の先端であり，その写像 U_t は実軸上にある．つまり U_t は時刻 $t \geq 0$ の実関数である．次を証明する．

定理 2.1 すべての $z \in \mathbb{H}$ に対して，z が K_t に含まれない間は，$g_t(z)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \qquad g_0(z) = z \tag{2.2}$$

これを **Löwner 微分方程式**という．

まず，次を示すことが出来る．(この証明は [1] を参照のこと．)

補題 2.1 $a_1(K_t)$ と U_t はともに t に関して連続である．

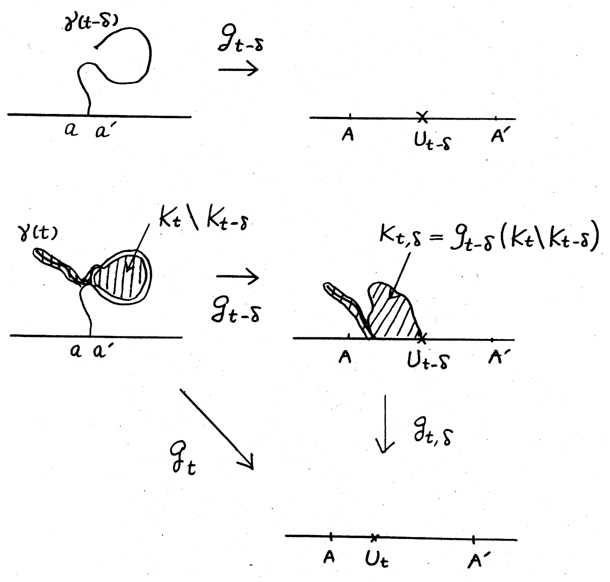

図 5: $K_t \setminus K_{t-\delta}$ と $K_{t,\delta}$ の図．$g_{t-\delta}$ と $g_{t,\delta}$ を合成すると g_t になる．

定理 2.1 の証明

$g_t(z)$ の左微分

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{g_t(z) - g_{t-\delta}(z)}{\delta}$$

を評価する．時刻 $t-\delta$ での hull と時刻 t での hull との差 $K_t \setminus K_{t-\delta}$ を考える．そして

$$K_{t,\delta} \equiv g_{t-\delta}(K_t \setminus K_{t-\delta})$$

とする．また

$$g_{t,\delta} \quad : \quad \mathbb{H} \setminus K_{t,\delta} \quad \mapsto \quad \mathbb{H} \quad \text{なる共形写像}$$

とする．すると $g_t = g_{t,\delta} \circ g_{t-\delta}$ なので (図 5 参照)

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{g_t(z) - g_{t-\delta}(z)}{\delta} &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \Big\{ g_{t,\delta} \circ g_{t-\delta}(z) - g_{t-\delta}(z) \Big\} \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta} \Big\{ g_{t,\delta} \circ g_{t-\delta}(z) - g_{t,\delta}^{-1}(g_{t,\delta} \circ g_{t-\delta})(z) \Big\} \end{aligned}$$

ここで (1.6) で $z = g_{t,\delta} \circ g_{t-\delta}(z)$ として得られる等式を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{g_t(z) - g_{t-\delta}(z)}{\delta} &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{I}m\, g_{t,\delta}^{-1}(\xi)}{g_{t,\delta} \circ g_{t-\delta}(z) - \xi} d\xi \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{I}m\, g_{t,\delta}^{-1}(\xi)}{g_t(z) - \xi} d\xi \end{aligned}$$

を得る．$0<\delta\ll 1$ のときは，$U_t=g_{t,\delta}(g_{t-\delta}(\gamma(t)))$ の近傍のみで $\mathcal{I}m\, g_{t,\delta}^{-1}(z)$ は値をもつ．($\delta\downarrow 0$ で，$g_{t,\delta}\to$ 恒等写像になるから，$\xi\in\mathbb{R}$ に対しては $\lim_{\delta\downarrow 0}\mathcal{I}m\, g_{t,\delta}(\xi)=0$ である．よって $\mathcal{I}m\, g_{t,\delta}^{-1}$ の support は U_t の 1 点のみになってしまう．図 6 参照．) したがって

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathcal{I}m\, g_{t,\delta}^{-1}(\xi)}{g_t(z)-\xi}d\xi &= \frac{1}{g_t(z)-U_t}\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{I}m\, g_{t,\delta}^{-1}(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{g_t(z)-U_t}\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}a_1(K_{t,\delta})\end{aligned}$$

となる．ここで，capacity $a_1(K)$ に対する積分表示 (1.7) を用いた．時刻のパラメータ t は (2.1) のようにスケールすることにしていたので，$a_1(K_{t,\delta})=2\delta$ であり，$g_t(z)$ の左微分が (2.2) の右辺に等しいことが導かれた．同様にして，右微分もこれに等しいことが示せる．∎

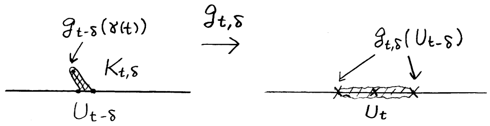

図 6: $0<\delta\ll 1$ のときの $K_{t,\delta}$ と その $g_{t,\delta}$ による像の様子.

3　確率的 Löwner 方程式

$B_t, t\in[0,\infty)$ を原点からスタートする 1 次元標準ブラウン運動とする．$\kappa>0$ を実パラメータとしたとき，次の確率微分方程式を**確率的 Löwner 方程式** (stochastic Löwner equation) とよぶ.

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t(z)=\frac{2}{g_t(z)-\sqrt{\kappa}B_t},\qquad g_0(z)=z \tag{3.1}$$

この方程式は, 右辺の分母 $g_t(z)-\sqrt{\kappa}B_t$ が零でないかぎり解をもつ．$z\in\overline{\mathbb{H}}$ に対して，

$$\tau(z)=\inf\{t: g_t(z)-\sqrt{\kappa}B_t=0\}$$

とする．そして，各時刻 $t\in[0,\infty)$ に対して

$$H_t=\{z\in\mathbb{H}:\tau(z)>t\},\quad K_t=\{z\in\overline{\mathbb{H}}:\tau(z)\le t\}$$

と書くことにする．$H_t=\mathbb{H}\setminus K_t$ である．H_t は単純連結領域であり，$g_t(z)$ は $H_t\mapsto\mathbb{H}$ の共形写像で $\lim_{z\to\infty}(g_t(z)-z)=0$ を満たすものを与える．確率的 Löwner 方程式 (3.1) の解として与えられる共形写像の族 $\{g_t: t\ge 0\}$ を **choral SLE$_\kappa$** とよぶ．このとき K_t はこのプロセスの hull とよばれる.

A　capacity $a_1(K)$ の特性

A.1　正値性の証明

g を $\mathbb{H}$ から $\mathbb{H}$ の中への写像とすると，$\mathbb{H}$ 内のすべての点 $z = x + \sqrt{-1}y$ において

$$y|g'(z)| < \mathcal{I}m\, g(z)$$

が成り立つ．ここで g' は微係数を表わす．(これは **Schwarz の補題**から導かれる．)

いま hull $K \neq \emptyset$ として，g_K の逆写像である g_K^{-1} を考えると，これは $\mathbb{H}$ から $\mathbb{H}$ の中への写像なので上の不等式が適用できる．特に z として $g_K(\sqrt{-1}y), y \in \mathbb{R}$ をとると

$$\mathcal{I}m\Big(g_K(\sqrt{-1}y)\Big)\Big|(g_K^{-1})'(g_K(\sqrt{-1}y))\Big| < y$$

となる．ここで自明な式

$$g_K^{-1}(g_K(\sqrt{-1}y)) = \sqrt{-1}y$$

の両辺を y で微分すると

$$(g_K^{-1})'(g_K(\sqrt{-1}y)) \times g_K'(\sqrt{-1}y) \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

となるから

$$(g_K^{-1})'(g_K(\sqrt{-1}y)) = \frac{1}{g_K'(\sqrt{-1}y)}$$

である．したがって上の不等式は

$$y > \frac{\mathcal{I}m\,(g_K(\sqrt{-1}y))}{|g_K'(\sqrt{-1}y)|} \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - \frac{\mathcal{I}m\,(g_K(\sqrt{-1}y))}{|g_K'(\sqrt{-1}y)|}y > 0$$

となる．$y \gg 1$ として，展開 (1.1) を行うと

$$\begin{aligned}
g_K(\sqrt{-1}y) &= \sqrt{-1}y + \frac{a_1(K)}{\sqrt{-1}y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)\\
\mathcal{I}m\,(g_K(\sqrt{-1}y)) &= y - \frac{a_1(K)}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)\\
g_K'(\sqrt{-1}y) &= \sqrt{-1} - \frac{a_1(K)}{\sqrt{-1}y^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^3}\right)\\
|g_K'(\sqrt{-1}y)| &= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
0 < y^2 - \frac{y - a_1(K)/y + \mathcal{O}(1/y^2)}{1 + \mathcal{O}(1/y^2)}y &= y^2 - y^2 + a_1(K) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y}\right)\\
&= a_1(K) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y}\right)
\end{aligned}$$

である．$y \to \infty$ の極限をとると，$a_1(K) > 0$ が結論される．

A.2 スケーリング則の証明

hull $K \neq 0$ を $r(>0)$ 倍した hull を rK と記す．$\mathbb{H} \setminus (rK)$ を $\mathbb{H}$ に写す共形写像が g_{rK} であるが，これとは別に写像 $g_K(z/r)$ も $\mathbb{H} \setminus (rK)$ を $\mathbb{H}$ に写す共形写像である．ただし後者は流体力学的正規化条件を満たさない．そこでこの写像を r 倍した $rg_K(z/r)$ を考えることにすると，これは流体力学的正規化条件を満たす．ところが, hull rK が与えられると，流体力学的正規化条件を満たす $\mathbb{H} \setminus (rK)$ から $\mathbb{H}$ への共形写像は unique に定まるはずであるから

$$g_{rK}(z) = rg_K(z/r)$$

であることになる．$z = \infty$ の周りでの展開 (1.1) を両辺で行うと，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= z + \frac{a_1(rK)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right) \\
(\text{右辺}) &= r\left(\frac{z}{r} + \frac{a_1(K)}{z/r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \\
&= z + \frac{r^2 a_1(K)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)
\end{aligned}$$

なので

$$a_1(rK) = r^2 a_1(K)$$

が結論される．

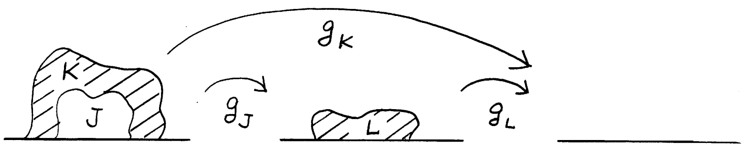

図 7: g_J と g_L の合成は g_K に等しい．

A.3 加法性の証明

$J \subset K \subset \overline{\mathbb{H}}$ であるような 2 つの hull J, K を考える．この 2 つに対応する共形写像をそれぞれ g_J, g_K とする．$K \setminus J$ の g_J による像の閉包を $L = \overline{g_J(K \setminus J)}$ と書き，$\mathbb{H} \setminus L \mapsto \mathbb{H}$ なる共形写像を g_L とする．図 7 に示したように，g_K と $g_L \circ g_J$ は $\mathbb{H} \setminus K \mapsto \mathbb{H}$ なる共形写像であり, ともに流体力学的正規化条件を満たすので

$$g_K = g_L \circ g_J$$

である． g_K, g_L, g_J でそれぞれ展開 (1.1) を行うと

$$
\begin{aligned}
&z+\frac{a_1(K)}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\\
&\quad=\left(z+\frac{a_1(J)}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)+\frac{a_1(L)}{z+a_1(J)/z+\mathcal{O}(1/z^2)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)
\end{aligned}
$$

となるが，

$$
(\text{右辺})=z+\frac{a_1(J)}{z}+\frac{a_1(L)}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)
$$

であるから

$$
a_1(K)=a_1(J)+a_1(J)
$$

が結論される．

参考文献

[1] W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its applications, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 1149-1229.