Schramm-Loewner Evolution (SLE) and Conformal Restriction *

香取眞理（中央大学理工学部物理学科）†

14 September 2007 (version 2c)

概 要

ここでは，SLE とそれに関連する話題について入門的なレビュー講演を行う．統計物理学における背景については，解説記事 [6] を参照していただきたい．主に，1 節と 2 節は Lawler (文献 [7]), 3 節は Werner (文献 [12]), 4 節は Friedrich and Werner (文献 [3]) に基づいた内容である．

目 次

---

*保型形式・無限可積分系合同合宿 (2007 年 9 月 6-9 日，八王子セミナーハウス) で講演.

†E-mail address : katori@phys.chuo-u.ac.jp

謝辞: 本講演の機会を与えて下さいました武部尚志氏，白石潤一氏に感謝いたします．また，本講演を準備するにあたり，共同研究者の種村秀紀氏 (千葉大数学) にいろいろとご教示いただきました．深く感謝いたします.

1　確率解析とベッセル過程

1.1　ブラウン運動，マルチンゲール，伊藤の公式

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ を確率空間とする．ここで Ω は標本空間，Ω の部分集合 $A \subset \Omega$ は事象を表すが，$\mathcal{F}$ はこの事象の全体であり，σ 加法族をなす．(すなわち，(i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F}$ なら A の補集合 $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}$, (iii) $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ なら $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$, という 3 条件を満たす.) また $\mathbf{P}$ は確率分布関数 (確率法則) を表す．Ω 上に定義される実数値関数 f が $\mathcal{F}$-可測とは，任意の実数 a に対して，$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \le a\} \in \mathcal{F}$ であることをいう．

- 確率過程は確率変数の時間発展である．過去の軌跡を「情報」と見るとき，情報の増大系が得られることになる．これを表すのがフィルトレーション (filtration, 情報系) $\{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$ である．これは, (i) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, 0 \le s < t$, (ii) 各 t に対して $\mathcal{F}_t$ は σ 加法族をなす，という 2 条件を満たすものである．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; \{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0})$ をフィルター付き確率空間という．

- 1 次元標準 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動 (Brownian motion) とは，次を満たす確率過程 B_t である．(以下，特に断りのないときには，これを単にブラウン運動とよび, BM と略記することにする.)

  (i)　各 $0 < s < t$ に対して，$B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_t$-可測であり，$\mathcal{F}_s$ と独立である．その分布は，平均 0, 分散 $t-s$ の正規分布である；

$$\mathbf{P}\Big(B_t - B_s \in [a,b]\Big) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} dx. \tag{1.1}$$

  (ii)　確率 1 で，$t \mapsto B_t$ は連続．すなわち，

  $^{\exists}\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ s.t. $\mathbf{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ かつ, $\omega \in \widetilde{\Omega}$ のとき $B_t(\omega)$ は t の連続関数.

- この定義から，任意の $c > 0$ に対して，$\dfrac{1}{c} B_{c^2 t}$ の分布と B_t の分布は等しいことが分かる．これを

$$\frac{1}{c} B_{c^2 t} \overset{\mathrm{d}}{=} B_t \quad {}^{\forall} c > 0 \tag{1.2}$$

  と書くことにする．(d は distribution の意味.) これを，BM のスケーリング性 (scaling property) という．

- $B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d$ が独立な BM であるとき，$\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d)$ を d 次元 BM という．

- B_t^1 と B_t^2 が独立な BM であるとき $\mathcal{B}_t = B_t^1 + \sqrt{-1} B_t^2$ を (標準) 複素 BM という．

注 1.1.　特に断りのないときは，$\mathbf{P}(\boldsymbol{B}_0 = 0) = 1$, つまり，($d$ 次元)BM は原点からスタートするものとする．一般化して，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ (あるいは $z \in \mathbb{C}$) に対して，$\boldsymbol{z}$ からスタートした (d 次元)BM を考えたいときには，$\boldsymbol{z}$ だけ空間座標をずらして $\mathbf{P}^{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{B}_t \in \cdot) \equiv \mathbf{P}(\boldsymbol{B}_t + \boldsymbol{z} \in \cdot)$ とする．こうすれば $\mathbf{P}^{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{z}) = 1$ となる．

- $\mathbf{P}$ (または $\mathbf{P}^{\boldsymbol{z}}$) に関する期待値 (expectation) を $\mathbf{E}$ (または $\mathbf{E}^{\boldsymbol{z}}$) と書くことにする．

- Z_t を確率過程とする．条件付き期待値 $\mathbf{E}[Z_t|\mathcal{F}_s], s < t$ は次を満たすものとして定義される；

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{E}[Z_t|\mathcal{F}_s], A\Big] = \mathbf{E}[Z_t|A], \quad {}^{\forall}A \in \mathcal{F}_s, \quad s \leq t. \tag{1.3}$$

- Z_t が ($\mathcal{F}_t$-) マルチンゲール (martingale) であるとは，Z_t が, 各 $t \geq 0$ で $\mathbf{E}[|Z_t|] < \infty$, かつ

$$\mathbf{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] = Z_s, \quad {}^{\forall}s \leq t \tag{1.4}$$

を満たす確率過程であることを意味する．上の条件付き期待値の定義式 (1.3) より，(1.4) は

$$\mathbf{E}[Z_t, A] = \mathbf{E}[Z_s, A], \quad {}^{\forall}A \in \mathcal{F}_s \tag{1.5}$$

に等しい．

- τ が $\mathcal{F}_t$-停止時刻 (stopping time)　$\Longleftrightarrow$　各 t に対して，$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

- Z_t が局所マルチンゲール (local martingale)
$\Longleftrightarrow$　$\mathcal{F}_t$-停止時刻の列 $\tau_1 < \tau_2 < \cdots \quad (\tau_j \to \infty, j \to \infty)$ が存在して，各 j に対して $Z_{t \wedge \tau_j}$ はマルチンゲール．ただし，$a \wedge b = \min\{a, b\}$.

- τ を $\mathcal{F}_t$-停止時刻とする．任意の有界な $\mathcal{F}_t$-可測関数 f に対して

$$\mathbf{E}^{\boldsymbol{x}}[f(Z_{\tau+t})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbf{E}^{Z_\tau}[f(Z_t)] \quad {}^{\forall}t \geq 0 \tag{1.6}$$

が成り立つとき，確率過程 Z_t は強マルコフ性 (strong Markov property) をもつという．

注 1.2.　定義より，(d 次元)BM はマルチンゲールであり，強マルコフ性をもつことが分かる．一般に，強マルコフ性をもつ連続確率過程を拡散過程という．

- 時間に比例した変動をもつ (つまり速度が定義できる) 確率過程を有界変動過程という．マルチンゲールと有界変動過程の和で与えられる確率過程を半マルチンゲールとよぶ．

- 確率過程 Z_t の二次変分（quadratic variation）を $\langle Z\rangle_t$ とおく:

$$\langle Z\rangle_t = \sup \sum_{j=0}^{m} (Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j})^2$$

ここで sup は 時間の分割 $0 \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} \equiv t$ についてとる．Z_t が有界変動過程である場合は $\langle Z\rangle_t = 0$ である．また，確率過程 $Z_t, \widehat{Z}_t$ に対して

$$\langle Z, \widehat{Z}\rangle_t \equiv \frac{1}{4}\left\{\langle Z + \widehat{Z}\rangle_t - \langle Z - \widehat{Z}\rangle_t\right\}$$

と定義し，さらに $dZ_t d\widehat{Z}_t = d\langle Z, \widehat{Z}\rangle_t$ という記法を用いることにする． BM の二次変分は $dB_t dB_t = dt$ であるが, 逆に二次変分が dt である連続マルチンゲールは BM に限る．一般に連続なマルチンゲールは二次変分により一意的に定まる．B_t^1 と B_t^2 が互いに独立な BM であるとき $dB_t^1 dB_t^2 = 0$ となるので, d 次元 BM $\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^d)$ に対して $dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij} dt$ が成立する．多次元の場合でも $dM_t^i dM_t^j, 1 \leqq i, j \leqq d$ が与えられるとマルチンゲール $\boldsymbol{M}_t = (M_t^1, M_t^2, \ldots, M_t^d)$ が一意的に決まることが知られている．

- $\boldsymbol{Z}_t = (Z_t^1, Z_t^2, \ldots, Z_t^d)$ をマルチンゲール部分が $\boldsymbol{M}_t$, 有界変動部分が $\boldsymbol{A}_t = (A_t^1, A_t^2, \ldots, A_t^d)$ である d 次元半マルチンゲールとする．F を $\mathbb{R}^d$ 上で定義された 2 階微分可能な実数値関数としたとき確率過程 $F(\boldsymbol{Z}_t)$ は,

$$dF(\boldsymbol{Z}_t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{Z}_t)\left(dM_t^j + dA_t^j\right) + \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{Z}_t) dM_t^j dM_t^k \tag{1.7}$$

と展開することができる．これを伊藤の公式という．

右辺の第 2 項は有界変動部分であるが, 以下ではこれをドリフト項ともよぶことにする.

1.2 d-次元ベッセル過程の定義

$d = 1, 2, 3, \cdots$ として, d 次元ブラウン運動 $\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d)$ を考える．これは $\mathbb{R}^d$ 内のベクトル値確率過程と見なせるが，このベクトルの大きさ ($\boldsymbol{B}_t$ の動径成分)

$$X_t = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (B_t^j)^2} \tag{1.8}$$

を考えると，これは 1 次元拡散過程となる．ただし，$X_t \in \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ である．$F(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}$ とおくと，$\dfrac{\partial F}{\partial x_k} = \dfrac{x_k}{F}, \quad \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \dfrac{1}{F} - \dfrac{x_k^2}{F^3}$ であるが

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F}\left\{d - \frac{1}{F^2}\sum_{k=1}^d x_k^2\right\} = \frac{d-1}{F}$$

なので，伊藤の公式 (1.7) と，$B_t^1, \cdots, B_t^d$ の独立性

$$dB_t^k dB_t^\ell = \delta_{k\ell} dt, \quad 1 \le k, \ell \le d \tag{1.9}$$

より $dX_t = \dfrac{1}{X_t}\sum_{k=1}^d B_t^k dB_t^k + \dfrac{d-1}{2}\dfrac{dt}{X_t}$ となる．ここで，マルチンゲール部分の二次変分をとると，再び (1.9) より

$$\left(\frac{1}{X_t}\sum_{k=1}^d B_t^k dB_t^k\right)^2 = \frac{1}{X_t^2}\sum_{k=1}^d (B_t^k)^2 (dB_t^k)^2 = \frac{1}{X_t^2}\sum_{k=1}^d (B_t^k)^2 dt = dt$$

であるから，これは，上の $\{B_t^j\}_{j=1}^d$ とは別の BM, B_t によって dB_t と与えられるものとしてよい．以上より，X_t が満たす確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE) は

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t} \tag{1.10}$$

で与えられることが分かった．

以下では $d \ge 1$ として，一般に (1.10) の SDE に従う 1 次元拡散過程を考えることにする．($d = 1$ のときは原点に反射壁を置くものとする.) これを d-次元ベッセル過程 (Bessel process) とよび，以下では BES_d と略記することにする．(1.10) の右辺の第 1 項はマルチンゲール部分 (BM)，第 2 項が有界変動部分 (ドリフト項) であるので，BES_d は半マルチンゲールであることが分かる．

注 1.3. ベッセル過程という呼び名は，X_t の推移 (確率) 密度が，以下に示すように変形ベッセル関数で表されることによる．SDE (1.10) に対応して，コルモゴロフ後進方程式 (Kolmogorov backward equation)

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t; x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t; x, y) + \frac{d-1}{2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}p(t; x, y) \tag{1.11}$$

が得られる．$d \ge 2$, および $1 \le d < 2$ で原点に反射条件を課した場合，BES_d の推移密度 ($p(t; x, y) = p(t; y, x)$ とする) は (1.11) の解

$$p(t; x, y) = \frac{1}{2t}(xy)^{-\nu}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \tag{1.12}$$

で与えられる．ただし，

$$\nu = \frac{d-2}{2} \geq -\frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d = 2(\nu+1) \geq 1 \tag{1.13}$$

であり，$I_\nu(z)$ は変形ベッセル関数

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

である．($\Gamma(z)$ はガンマ関数：$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \quad \mathrm{Re}\, z > 0.$) スピード測度とよばれる測度が

$$m_\nu(dy) = 2y^{2\nu+1} dy \tag{1.14}$$

で与えられ，(1.12) に $m_\nu(dy)/dy = 2y^{2\nu+1}$ をかけることによって，BES_d に対して，時間 $t \geq 0$ の間に $x > 0$ から $y \geq 0$ へ推移する推移確率密度関数が

$$p(t, y|x) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \tag{1.15}$$

と与えられる．

1.3 BES_d の次元性

以下では，初期値を上付き添字で表し，$x > 0$ から出発した BES_d を X_t^x と書くことにする；

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad t \geq 0, \qquad X_0^x = x > 0 \tag{1.16}$$

である．

命題 1.1 任意の $x > 0$ に対して

$$\frac{1}{x} X_{x^2 t}^x \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_t^1 \tag{1.17}$$

が成り立つ．これを，ベッセル過程のスケーリング性という．

<u>証明.</u> これは BM のスケーリング性 (1.2) が遺伝したものである．$Y_t = \dfrac{1}{x} X_{x^2 t}^x$ とおくと，

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{x}\left(dB_{x^2 t} + \frac{d-1}{2} \frac{d(x^2 t)}{X_{x^2 t}^x}\right) \\ &= \frac{1}{x} dB_{x^2 t} + \frac{d-1}{2} \frac{x}{X_{x^2 t}^x} dt \\ &= d\widetilde{B}_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{Y_t}. \end{aligned}$$

ここで，$\widetilde{B}_t = B_{x^2 t}/x \stackrel{\mathrm{d}}{=} B_t$ である．また，初期値は $Y_0 = X_0^x/x = x/x = 1$ である．∎

$x > 0$ から出発した BES_d が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す；

$$T_x = \inf\{t > 0 : X_t^x = 0\}. \tag{1.18}$$

SDE (1.16) は $t \leq T_x$ までは well-defined である．次の定理を証明することにする．

定理 1.2 *(i)* $\quad d \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad T_x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．

(ii) $\quad d > 2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} X_t^x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．

(iii) $\quad d = 2 \quad \Longrightarrow \quad \inf_{t>0} X_t^x = 0, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．
つまり，$x > 0$ から出発した BES_2 は原点にはぶつからないが，原点に無限に近づく．

(iv) $\quad 1 \leq d < 2 \quad \Longrightarrow \quad T_x < \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．

証明 $\quad 0 < x_1 < x < x_2 < \infty$ に対して

$$\sigma = \inf\{t > 0 : X_t^x = x_1 \quad \text{or} \quad X_t^x = x_2\} \tag{1.19}$$

として，

$$\phi(x) = \phi(x; x_1, x_2) = \mathbf{P}(X_\sigma^x = x_2) \tag{1.20}$$

と定義する．この定義から明らかに

$$\phi(x_1) = 0, \quad \phi(x_2) = 1 \tag{1.21}$$

である．$t \wedge \sigma \equiv \min\{t, \sigma\}$ として, 確率過程

$$M_t = \phi(X_{t\wedge\sigma}^x) \tag{1.22}$$

を考える．これは

$$M_t = \mathbf{E}\Big[\phi(X_\sigma^x)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \tag{1.23}$$

とも書ける．このとき

$$\mathbf{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, \quad 0 \leq^\forall s \leq t \tag{1.24}$$

が成り立つことは明らかである．つまり M_t はマルチンゲールである．($\phi(x)$ の 2 回微分可能性を仮定して) 伊藤の公式 (1.7) を適用すると，BES_d の SDE (1.16) より

$$\begin{aligned} M_t &= \phi(x) + \int_0^{t\wedge\sigma} \phi'(X_s^x)\left[dB_s + \frac{d-1}{2}\frac{ds}{X_s^x}\right] + \int_0^{t\wedge\sigma} \frac{1}{2}\phi''(X_s^x)(dB_s)^2 \\ &= \phi(x) + \int_0^{t\wedge\sigma} \phi'(X_s^x)dB_s + \int_0^{t\wedge\sigma} \frac{1}{2}\left[\phi''(X_s^x) + \frac{d-1}{X_s^x}\phi'(X_s^x)\right] ds \end{aligned}$$

となる．(以下このノートでは，$f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$ という微分に対する略記を用いる.) M_t は局所マルチンゲールなので，有界変動部分 (ドリフト項) は零である．つまり

$$\phi''(x) + \frac{d-1}{x}\phi'(x) = 0, \quad x_1 < x < x_2 \tag{1.25}$$

という微分方程式が得られる．これは $\left(\dfrac{d}{dx} + \dfrac{d-1}{x}\right)\phi'(x) = 0$ なので，c を積分定数として

$$\phi'(x) = cx^{-(d-1)}$$

と積分される．境界条件 (1.21) の一つ $\phi(x_1) = 0$ の下，もう一度積分すると

$$\begin{aligned} &d \neq 2 \text{ のとき} \quad \phi(x) = c\int_{x_1}^{x} y^{-(d-1)}dy = \frac{c}{2-d}(x^{2-d} - x_1^{2-d}) \\ &d \neq 2 \text{ のとき} \quad \phi(x) = c\int_{x_1}^{x} \frac{dy}{y} = c(\log x - \log x_1) \end{aligned}$$

となる．境界条件 $\phi(x_2) = 1$ も課すと，積分定数 c が定まり，

$$\phi(x) = \phi(x; x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x^{2-d} - x_1^{2-d}}{x_2^{2-d} - x_1^{2-d}} & d \neq 2 \text{ のとき} \\[2ex] \dfrac{\log x - \log x_1}{\log x_2 - \log x_1} & d = 2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{1.26}$$

と定められる．

(i) $d > 2$ のとき，$2 - d < 0$ なので，(1.26) の上の式より，任意の $x_2 = L > x$ に対して

$$\begin{aligned} \phi(x; 0, L) &\equiv \lim_{x_1 \to 0} \phi(x; x_1, L) \\ &= \lim_{x_1 \to 0} \frac{x^{2-d} - x_1^{2-d}}{L^{2-d} - x_1^{2-d}} = 1. \end{aligned}$$

つまり，$x > 0$ から出発した BES_d は，確率 1 で，原点より先に $L > 0$ に到達することになる．したがって，$T_x = \inf\{t > 0 : X_t^x = 0\} = \infty$ である．

$d = 2$ のときは，(1.26) の下の式を用いて，同様に

$$\phi(x; 0, L) = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\log x - \log x_1}{\log L - \log x_1} = 1$$

となるので，やはり $T_x = \infty$ である．

(ii)　$\alpha > 1$ をとって，$x_k = \alpha^k x, k = 1, 2, 3, \ldots$ とする．$d > 2$ では $2 - d \equiv \beta < 0$ であり，(1.26) より

$$
\begin{aligned}
\phi(x_k; x_{k-1}, x_{k+1}) &= \frac{x_k^\beta - x_{k-1}^\beta}{x_{k+1}^\beta - x_{k-1}^\beta} = \frac{\alpha^{k\beta} - \alpha^{(k-1)\beta}}{\alpha^{(k+1)\beta} - \alpha^{(k-1)\beta}} \\
&= \frac{\alpha^\beta - 1}{\alpha^{2\beta} - 1} = \frac{1}{\alpha^\beta + 1} > \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

である．1 次元格子 $\mathbb{Z} \equiv \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 上のサイト $n > 0, n \in \mathbb{Z}$ から出発して，単位時間に右サイトにステップする確率が $p = 1/(\alpha^\beta + 1)$, 左サイトにステップする確率が $1 - p$ であるような非対称な 1 次元ランダム・ウォークを考える．このような非対称な 1 次元ランダム・ウォークは非再帰的である．BES_d をこのような 1 次元非対称ランダム・ウォークと比較することにより，確率 1 で $X_t^x \to \infty, {}^\forall x > 0$ であることが結論される．

(iii)　(1.26) の $d = 2$ の式で，特に $x_1 = 1/n < x < x_2 = e^n$ とおくと, $n \to \infty$ で

$$
\phi(x; 1/n, e^n) = \frac{\log x + \log n}{n + \log n} \longrightarrow 0
$$

である．よって，任意の $n > 0$ に対して，X_t^x が $1/n$ に近づくことが分かる．

(iv)　$1 \le d < 2$ のときは, $\lim_{x_1 \to 0} x_1^{2-d} = 0$ なので，(1.26) の上の式より，$L \to \infty$ で

$$
\phi(x; 0, L) = \frac{x^{2-d}}{L^{2-d}} \longrightarrow 0.
$$

よって，確率 1 で $T_x < \infty$ である．∎

以下では，$1 \le d < 2$ の場合を考えることにする．$x \in \mathbb{R}_+$ に対して，同一の BM, B_t を用いて

$$
X_t^x = x + B_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X_s^x}, \quad t \le T_x \tag{1.27}
$$

で与えられる BES_d の族 $\{X_t^x\}_{x>0}$ を考えることにする．この定義より

$$
x < y \quad \Longrightarrow \quad X_t^x < X_t^y, {}^\forall t < T_x \quad \Longrightarrow \quad T_x \le T_y
$$

であることは明らかである．$x < y$ だが，$T_x = T_y$ となることはあり得るであろうか．そこで, $x \le y$ に対して

$$
q(x, y) = \mathbf{P}(T_x = T_y) \tag{1.28}
$$

とおくことにする．まず，スケーリング性 (命題 1.1) より，空間スケールが違っていても，時間スケールを適当に変えれば分布としては同一視できるので，比だけが重要であることが分かる．よって

$$q(x,y) = q(1, y/x) \tag{1.29}$$

である．また，任意の $t > 0$ に対して $\lim_{r\to\infty} \mathbf{P}(T_r < t) = 0$ であるから

$$\lim_{r\to\infty} q(1,r) = 0 \tag{1.30}$$

である．次の補題を用いる．

補題 1.3 $0 < x < y$ に対して，事象 $\{T_x = T_y\}$ と次の事象とは，確率 0 の部分を除いて等しい；

$$\sup_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \infty. \tag{1.31}$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{事象 } (1.31) \quad &\iff \quad \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \le^{\exists} c < \infty, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff \quad X_t^y - X_t^x \le^{\exists} cX_t^x, \quad 0 < t < T_x \\ &\iff \quad X_t^y \le (1 +^{\exists} c) X_t^x, \quad 0 < t < T_x \end{aligned}$$

なので，$X_t^x = 0 \Longrightarrow X_t^y = 0$, つまり $(1.31) \Longrightarrow T_x = T_y$. よって，二つの事象の同値性を示すには，$T_x = T_y$ だが (1.31) が成り立たない状況は，確率 0 であることを言えばよい．そのために

$$p_r = \mathbf{P}\left(T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sup_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \ge r \right)$$

という確率を考える．$\tau_r = \inf_{t<T_x}\{(X_t^y - X_t^x)/X_t^x = r\}$ なる時刻があったとすると，この時刻 τ_r では $X_t^y/X_t^x = 1 + r$ となる．そこで，この時刻から再スタートしたプロセスを考えると，BES_d の強マルコフ性から

$$p_r \le q(1, 1+r)$$

という評価が得られる．(1.30) より $\lim_{r\to\infty} q(1, 1+r) = 0$ なので，

$$p_\infty = \lim_{r\to\infty} p_r = \mathbf{P}\left(T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sum_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty \right) = 0.$$

よって，主張が証明されたことになる．∎

次の定理は，$x < y$ であっても，$T_x = T_y$ ということがあり得ることを主張するものである．

定理 1.4 *(i)* $\dfrac{3}{2} < d < 2 \quad \Longrightarrow \quad x < y$ に対して, $\mathbf{P}(T_x = T_y) > 0$.

(ii) $1 \le d \le \dfrac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad x < y$ に対して, $T_x < T_y$ が確率 1 で成り立つ.

証明. $0 < x < y$ に対して，次の確率過程を考える

$$Z_t = \log\left(\frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x}\right), \quad t < T_x. \tag{1.32}$$

ただし,

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad dX_t^y = \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^y} + dB_t$$

である．ここで，共通の BM, B_t を用いていることに注意せよ．$f(x,y) = \log\{(y-x)/x\}$ とおき，$f_x(x,y) = \partial f(x,y)/\partial x$ というような偏微分の略記を用いると，

$$\begin{aligned}
&f_x(x,y) = -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{y-x} \\
&f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(y-x)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{1}{(y-x)^2}
\end{aligned}$$

であるから，伊藤の公式 (1.7) より

$$\begin{aligned}
dZ_t &= f_x(X_t^x, X_t^y)\left[dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^x}\right] + f_y(X_t^x, X_t^y)\left[dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^y}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(X_t^x, X_t^y) + 2f_{xy}(X_t^x, X_t^y) + f_{yy}(X_t^x, X_t^y)\Big]dt \\
&= -\frac{1}{X_t^x}dB_t + \left[\left(\frac{3}{2} - d\right)\frac{1}{(X_t^x)^2} + \frac{d-1}{2}\frac{X_t^y - X_t^x}{(X_t^x)^2 X_t^y}\right]dt
\end{aligned} \tag{1.33}$$

が得られる．ここで，次の関係を満たすように，ランダムな時間変更 $t \to r$ を行う；

$$\int_0^{r(t)} \frac{ds}{(X_s^x)^2} = t. \tag{1.34}$$

(つまり，$dr(t)/(X_{r(t)}^x)^2 = dt$ である.) (1.33) を変更された後の時刻 $r(t)$ で考えると，

$$dZ_{r(t)} = -\frac{1}{X_{r(t)}^x}dB_{r(t)} + \left[\left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2}\frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y}\right]\frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2}$$

となるが，ここで

$$\widetilde{B}_t = -\int_0^{r(t)} \frac{dB_s}{X_s^x}$$

とおくと，

$$(d\widetilde{B}_t)^2 = \frac{1}{(X_{r(t)}^x)^2}(dB_{r(t)})^2 = \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2} = dt$$

なので，$\widetilde{B}_t$ は BM である．そこで $\widetilde{Z}_t = Z_{r(t)}$ と書くことにすると

$$d\widetilde{Z}_t = d\widetilde{B}_t + \left[\left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2}\frac{X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)}}{X^y_{r(t)}}\right] dt \tag{1.35}$$

という SDE が得られる．

(i) $\dfrac{3}{2} < d < 2$ のとき，$d' \in (3/2, d)$ を選び，

$$\varepsilon = \frac{2(d-d')}{d-1}$$

とおく．$y = (1+\varepsilon/2)x$ の場合を考えることにする．

$$\sigma = \inf\{t > 0 : X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)} = \varepsilon X^y_{r(t)}\}$$

とする．すると $0 \leq t < T_x \wedge \sigma$ では，$(X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)})/X^y_{r(t)} \leq \varepsilon$ なので，(1.35) のドリフト項の係数は

$$\left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2}\frac{X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)}}{X^y_{r(t)}} \leq \left(\frac{3}{2} - d\right) + \frac{d-1}{2} \times \frac{2(d-d')}{d-1} = \frac{3}{2} - d'$$

と上から抑えられる．そこで

$$d\widetilde{Z}^*_t = d\widetilde{B}_t + \left(\frac{3}{2} - d'\right) dt, \quad \widetilde{Z}^*_0 = \widetilde{Z}_0 = \log\frac{\varepsilon}{2}$$

に従う確率過程 $\widetilde{Z}^*_t$ を考えると，

$$\widetilde{Z}_t \leq \widetilde{Z}^*_t, \quad 0 \leq t < T_{x\wedge\sigma}$$

である．ところが $d' > 3/2$ としたので，$\widetilde{Z}^*_t$ のドリフト項の係数は負である．よって $\widetilde{Z}^*_t$ は $\log(\varepsilon/2)$ から出発したものの，永久に $\log\varepsilon$ の値に到達できないという確率が正であることになる．よって $\widetilde{Z}_t$ も $\log\varepsilon$ に到達できない確率も正である．よって，正の確率で

$$\log\left(\frac{X^y_t - X^x_t}{X^x_t}\right) < \log\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X^y_t - X^x_t}{X^x_t} < \varepsilon$$

となり，事象 (1.31) が成立することになる．よって補題 1.3 より，

$$\mathbf{P}(T_x = T_y) = q\left(x, \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)x\right) = q\left(1, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0$$

である．

(ii) $1 \leq d \leq \dfrac{3}{2}$ のときは，$3/2 - d \geq 0$ であり，また

$$\frac{X^y_{r(t)} - X^x_{r(t)}}{X^y_{r(t)}} > 0, \quad 0 \leq t < T_x$$

なので，ドリフト項の係数は正である．よって

$$\sup_{t<T_x} \widetilde{Z}_t = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{t<T_x} e^{\widetilde{Z}_t} = \sup_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty$$

なので，補題 1.3 より $\mathbf{P}(T_x = T_y) = 0$ である．∎

1.4　マルチンゲールと超幾何方程式

$\frac{3}{2} < d < 2$ のときは，$x \geq 0$ に対して

$$\mathbf{P}(T_{1+x} = T_1) > 0$$

であることを証明したが，この確率の x 依存性は超幾何関数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{1.36}$$

を用いて，正確に表すことができる．ただしここで，$(c)_k = \Gamma(c+k)/\Gamma(c) = c(c+1)\cdots(c+(k-1))$ である．

命題 1.5 $\frac{3}{2} < d < 2$ のとき，$x \geq 0$ に対して

$$\mathbf{P}(T_{1+x} = T_1) = 1 - \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2d-3} F\left(2d-3, d-1, 2(d-1); \frac{x}{1+x}\right). \tag{1.37}$$

証明.　確率過程

$$R_t = \frac{X_t^{1+x} - X_t^1}{X_t^1}, \quad x > 0 \tag{1.38}$$

を考える．$g(x, y) = (y-x)/x$ とおくと

$$\begin{aligned} &g_x(x,y) = -\frac{y}{x^2}, \quad g_y(x,y) = \frac{1}{x} \\ &g_{xx}(x,y) = \frac{2y}{x^3}, \quad g_{yy}(x,y) = 0, \quad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

なので，伊藤の公式 (1.7) より

$$dR_t = -\frac{R_t}{X_t^1} dB_t + \left[\frac{3-d}{2}\frac{1}{R_t} - \frac{d-1}{2}\frac{1}{R_t(1+R_t)}\right] \left(\frac{R_t}{X_t^1}\right)^2 dt \tag{1.39}$$

が得られる．ここで，次の時間変更 $t \to \overline{r}(t)$ を行う；

$$\int_0^{\overline{r}(t)} \left(\frac{R_t}{X_t^1}\right)^2 ds = t. \tag{1.40}$$

また

$$\overline{B}_t = -\int_0^{\overline{r}(t)} \frac{R_s}{X_s^1} dB_s \tag{1.41}$$

とすると，$\overline{B}_t$ は BM であり，$\widetilde{R}_t = R_{\overline{r}(t)}$ とおくと

$$\begin{aligned} d\widetilde{R}_t &= \left[\frac{3-d}{2}\frac{1}{\widetilde{R}_t} - \frac{d-1}{2}\frac{1}{\widetilde{R}_t(\widetilde{R}_t+1)}\right] dt + d\overline{B}_t \\ &= \left[\frac{2-d}{\widetilde{R}_t} + \frac{d-1}{2}\frac{1}{\widetilde{R}_t+1}\right] dt + d\overline{B}_t \end{aligned} \tag{1.42}$$

が得られる．

$$\psi(x) = \mathbf{P}(T_{1+x} = T_1) = q(1, 1+x) \tag{1.43}$$

として，

$$\overline{M}_t = \psi(\widetilde{R}_t) \tag{1.44}$$

とおくと，BES_d のスケーリング性より，$\overline{M}_t$ はマルチンゲールである；

$$\mathbf{E}[\overline{M}_t|\mathcal{F}_s] = \overline{M}_s, \quad 0 \leq^{\forall} s < t. \tag{1.45}$$

他方，伊藤の公式 (1.7) と (1.42) より

$$d\overline{M}_t = \psi'(\widetilde{R}_t)d\overline{B}_t + \psi'(\widetilde{R}_t)\left[\frac{2-d}{\widetilde{R}_t} + \frac{d-1}{2}\frac{1}{\widetilde{R}_t+1}\right] dt + \frac{1}{2}\psi''(\widetilde{R}_t)dt. \tag{1.46}$$

ドリフト項 $=0$ であるはずなので，$\psi(x)$ に対して，次の微分方程式が得られる；

$$\frac{1}{2}\psi''(x) + \left[\frac{2-d}{x} + \frac{d-1}{2}\frac{1}{x+1}\right]\psi'(x) = 0. \tag{1.47}$$

ここで

$$x = \frac{u}{1-u} \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{x}{1+x}$$

という変数変換 $x \to u$ を行い，$\widetilde{\psi}(u) = \psi(x)$ とおくと，(1.47) 式は

$$u(1-u)\widetilde{\psi}''(u) + \Big\{2(2-d) - (3-d)u\Big\}\widetilde{\psi}'(u) = 0 \tag{1.48}$$

となる．これは，超幾何方程式

$$u(1-u)F'' + \Big\{\gamma - (\alpha+\beta+1)u\Big\}F' - \alpha\beta F = 0 \tag{1.49}$$

で特に

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2-d, \quad \gamma = 2(2-d) \tag{1.50}$$

とした場合に他ならない．(1.49) の $u=0$ における解の基本系として

$$F(\alpha,\beta,\gamma;u) \quad \text{と} \quad u^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma; u)$$

をとる．(1.50) では，$\alpha=0$ なので前者は 1 であり，後者は $u^{2d-3}F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$ となる．よって，c_1, c_2 を積分定数として

$$\widetilde{\psi}(u) = c_1 + c_2 u^{2d-3} F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(0) &= \psi(0) = \mathbf{P}(T_1 = T_1) = 1 \\
\widetilde{\psi}(1) &= \psi(\infty) = \lim_{x\to\infty} \mathbf{P}(T_{1+x} = T_1) = 0
\end{aligned} \tag{1.51}$$

なので，

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= -F(2d-3, d-1, 2(d-1); 1) = -\frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)}
\end{aligned} \tag{1.52}$$

と定まる．∎

2　シュラム・レブナー方程式

2.1　複素上半平面内の曲線と共形変換

複素平面を $\mathbb{C}$, その上半平面を $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,(z)>0\}$ と書くことにする．また $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ とする．実軸上の一点 $\gamma(0)\in\mathbb{R}$ を出発点として，時間 $t\in[0,\infty)$ とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma=\gamma[0,t],\quad t\in[0,\infty)$$

を考える．まずは単純曲線 (自分自身と接したり交わったりしない曲線) を考えることにし，また $\gamma(0,\infty)\in\mathbb{H}$ とする．リーマンの写像定理と Möbius 変換に関する初等的な知識より，各時刻 $t>0$ において,

$$z+\frac{a(t)}{z}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right),\quad a(t)\in\mathbb{R},\quad z\to\infty \tag{2.1}$$

という漸近形をもつ

$$\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]\quad\to\quad\mathbb{H}$$

なる共形変換が唯一存在することを示すことができる．ここで，共形変換といったときには，等角の全単射を意味するものとする (付録 A.1 を参照)．この共形変換を $g_{\gamma(0,t]}(z)$ または $g_t(z)$ と書くことにする．$g_0(z)=z$ とする．

<u>**注 2.1.**</u>　この変換 g_t によって，領域 $\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ の境界のうち，$\gamma(0,t]\cup\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ に，無限遠点 ∞ は無限遠点 ∞ に写される．

以下，この 2.1 節では $t\in(0,\infty)$ を固定して考えることにする．

$B_s^j, j=1,2$ を 2 つの独立な BM として，$\mathbb{C}$ 上の複素 BM を

$$\mathcal{B}_s=B_s^1+\mathrm{i}\,B_s^2,\quad s\in[0,\infty) \tag{2.2}$$

で定義する．いま，$\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ の内点 z からスタートした複素 BM を考え，これがこの領域の境界である $\gamma(0,t]\cup\mathbb{R}$ のいずれかの点に初めて到達する時刻を

$$\tau_t=\inf\{s\geq 0:\mathcal{B}_s\in\gamma(0,t]\cup\mathbb{R}\} \tag{2.3}$$

と書くことにする．$z-g_t(z)$ は $\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ で有界な正則関数であり，その実部と虚部はそれぞれ調和関数である．ここでは虚部

$$\phi_t(z)=\mathrm{Im}\,(z-g_t(z)),\quad z\in\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t] \tag{2.4}$$

を考えることにすると，これは

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}^z[\phi_t(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \tag{2.5}$$

と与えることができる．よって

$$\phi_t(z) = \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})] - \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(g_t(\mathcal{B}_{\tau_t}))] = \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})]$$

となる．ここで，$\mathcal{B}_{\tau_t} \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t]$ であるので注 2.1 より $g_t(\mathcal{B}_{\tau_t}) \in \mathbb{R}$ であることを用いた．したがって

$$\mathrm{Im}\,(g_t(z)) = \mathrm{Im}\,(z) - \mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \tag{2.6}$$

という表式が得られる．いま

$$R_t = \sup\{|\gamma(s) - \gamma(0)| : s \in (0,t]\} \tag{2.7}$$

とする．つまり $\gamma(0,t]$ は $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の半円 $\mathrm{B}(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ の中に含まれることになる．この半円の外の $\mathbb{H}$ の点 $z \in \mathbb{H} \setminus \mathrm{B}(\gamma(0), R_t)$ に対して，この点からスタートした複素 BM を考えることにする．この複素 BM が $\mathrm{B}(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ の半円周上，または実軸に初めて到達する時刻を σ と書くことにする;

$$\sigma = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{B}_s \in \mathrm{B}(\gamma(0), R_t) \cup \mathbb{R}\}.$$

このとき，到達点 $\mathcal{B}_\sigma$ の半円上の分布密度を $p(z, \gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}), \theta \in (0, \pi)$ と書くことにすると，複素 BM の強マルコフ性より

$$\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)] = \int_0^\pi p(z, \gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}) \mathbf{E}^{\gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)] R_t d\theta \tag{2.8}$$

が成り立つ．この半円上の密度は，上半平面から半円 $\mathrm{B}(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ を除いた領域

$$D = \{z \in \mathbb{H} : |z - \gamma(0)| > R_t\}$$

におけるポアソン核であり，

$$p(z, \gamma(0) + R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) R_t^{n-1} \mathrm{Im} \left[\frac{1}{(z - \gamma(0))^n} \right], \quad z \in D, \quad \theta \in (0, \pi) \tag{2.9}$$

で与えられる (付録 A.2 を参照)．曲線 $\gamma[0,t]$ は，その出発点 $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の円に含まれる．したがって，この曲線を実軸に沿って $-\gamma(0)$ だけ平行移動して原点からスタートするように

した後，全体を $1/R_t$ に拡大または縮小して得られる曲線を $\widetilde{\gamma}[0,t]$ と書くことにすると，これは原点を中心とする単位円に含まれることになる．

$$\widetilde{\tau}_t = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{B}_s \in \widetilde{\gamma}(0,t] \cup \mathbb{R}\} \tag{2.10}$$

とすると，複素 BM のスケーリング性よりこの分布は τ_t/R_t^2 の分布に等しく，

$$\mathbf{E}^{\gamma(0)+R_t e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})] = R_t \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})], \quad \theta \in (0,\pi) \tag{2.11}$$

である．これらの結果を (2.6) に代入すると

$$\mathrm{Im}\,(g_t(z)) = \mathrm{Im}\left(z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z-\gamma(0))^n}\right) \tag{2.12}$$

となる．ただし

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((n-1)\theta) \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta, \quad n = 2,3,4,\cdots \tag{2.13}$$

である．

g_t は (2.1) という漸近形をもつ共形変換（正則関数）であるので，これより

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z-\gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0,t] \tag{2.14}$$

と定まることになる．

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき，$n = 2,3,\cdots$ に対して $|\sin(n\theta)| \leq c_n \sin\theta$ となる有限な値 c_n をとることができる．よって

$$\begin{aligned} |a_n(t)| &\leq R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin((n-1)\theta)| \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^{n-2} a_2(t), \quad n = 3,4,5,\cdots \end{aligned} \tag{2.15}$$

という評価が得られる．

注 2.2. (2.13) で特に $n=2$ とすると

$$a_2(t) = R_t^2 \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, \mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] d\theta \tag{2.16}$$

という表式が得られることになるが，上で与えた議論を逆にたどると

$$a_2(t) = \lim_{y \to \infty} \mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_t})] \tag{2.17}$$

であることが分かる (詳しくは，付録 A.3 を参照)．この量は曲線 $\gamma(0,t]$ の半平面 capacity (hcap($\gamma(0,t]$) と書く) とよばれている．

注 2.3. $H_t=\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]$ におけるポアソン核を $p_{H_t}(z,w), z\in H_t, w\in\partial H_t=\widetilde{\gamma}(0,t]\cap\mathbb{R}$ と書くと，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\widetilde{\tau}_t})] &= \int_{\partial H_t} p_{H_t}(e^{\mathrm{i}\,\theta},w)\mathrm{Im}\,(w)dw \\ &= \int_{\widetilde{\gamma}(0,t]} p_{H_t}(e^{\mathrm{i}\,\theta},w)\frac{\mathrm{Im}\,(w)}{\mathrm{Im}\,(e^{\mathrm{i}\,\theta})}dw\times\mathrm{Im}\,(e^{\mathrm{i}\,\theta}) \\ &= \sin\theta\int_{\widetilde{\gamma}(0,t]}\widehat{p}_{H_t}(e^{\mathrm{i}\,\theta},w)dw\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\widehat{p}_D(z,w)\equiv p_D(z,w)\frac{\mathrm{Im}\,(w)}{\mathrm{Im}\,(z)},\quad z\in D,\quad w\in\partial D \tag{2.18}$$

としたが，これは次式で定義される $\mathbb{H}$-excursion $\widehat{\mathcal{B}}_s$ のポアソン核になっている [7]:

$$\widehat{\mathcal{B}}_s=B_s+\mathrm{i}\,X_s,\quad s\in[0,\infty). \tag{2.19}$$

ここで B_s は BM であり，X_s はこれと独立な BES_3 (3 次元ベッセル過程) である．したがって上の量は $\sin\theta\,\mathbf{P}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}\Big(\widehat{\mathcal{B}}[0,\infty)\cap\widetilde{\gamma}(0,t]\neq\emptyset\Big)$ となるので，係数 $a_n(t)$ に対しては

$$a_n(t)=R_t^n\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin((n-1)\theta)\sin\theta\,\mathbf{P}^{e^{\mathrm{i}\,\theta}}\Big(\widehat{\mathcal{B}}[0,\infty)\cap\widetilde{\gamma}(0,t]\neq\emptyset\Big)\,d\theta \tag{2.20}$$

という $\mathbb{H}$-excursion と曲線 $\widetilde{\gamma}(0,t]$ との交叉確率を用いた表式も得られる．

2.2 レブナーの微分方程式

この 2.2 節では，時間を連続的に変化させて $\mathbb{H}$ 内の曲線 γ とそれに伴う共形変換 $g_t(x)$ の時間発展を追うことにする．$\varepsilon>0$ として，時刻 $t+\varepsilon$ までの曲線 $\gamma(0,t+\varepsilon]$ を考える．これに対応する共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ は次のような合成で与えられる．

$$\begin{aligned}g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0,t+\varepsilon]}(z) \\ &= \Big[g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}\circ g_t\Big](z)=g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])}(g_t(z)).\end{aligned} \tag{2.21}$$

この共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ によって，$\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t+\varepsilon]$ は $\mathbb{H}$ に写される．しかし，$\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t+\varepsilon]$ を $g_{t+\varepsilon}(z)$ ではなく $g_t(z)$ で写すと，像は $\mathbb{H}$ ではなく $\mathbb{H}\setminus g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])$ となる．これは $\mathbb{H}$ から曲線 $g_t(\gamma(t,t+\varepsilon])$

を除いた領域である．この曲線の出発点にあたる実軸上の点を U_t と書くことにする．すなわち

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \tag{2.22}$$

とする.（当然 $U_0 = \gamma(0)$ である.）すると，前節の結果 (2.14) より

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{g_t(\gamma(t,t+\varepsilon]))}(g_t(z)) \\ &= g_t(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}((t,t+\varepsilon])}{(g_t(z)-U_t)^n} \end{aligned} \tag{2.23}$$

という形に書けることになる．ただしここで

$$R_t^\varepsilon = \sup\Big\{|g_t(\gamma(s)) - U_t| : s \in [t, t+\varepsilon]\Big\}, \tag{2.24}$$

として，

$$|a_n((t,t+\varepsilon])| \le c_{n-1}(R_t^\varepsilon)^{n-2} a_2((t,t+\varepsilon]), \quad n = 3,4,5,\cdots \tag{2.25}$$

である．また，(2.23) の右辺の $g_t(z)$ に (2.14) を代入して展開したものは，(2.14) で $t \to t+\varepsilon$ としたものに等しいはずであり，その双方の $1/z$ の係数を比べることにより

$$a_2((t,t+\varepsilon]) = a_2(t+\varepsilon) - a_2(t). \tag{2.26}$$

という半平面 capacity の加法性が導かれる (詳しくは，付録 A.3 を参照).

以上より

$$\left| g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z) - \frac{a_2(t+\varepsilon)-a_2(t)}{g_t(z)-U_t} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n (R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z)-U_t|^n} (a_2(t+\varepsilon) - a_2(t))$$

という不等式が得られることになる．この両辺を ε で割ると

$$\left| \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} - \frac{1}{g_t(z)-U_t} \frac{a_2(t+\varepsilon)-a_2(t)}{\varepsilon} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n (R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z)-U_t|^n} \times \frac{a_2(t+\varepsilon)-a_2(t)}{\varepsilon}$$

となるが，ここで $\varepsilon \to 0$ の極限をとることにする．半平面 capacity $a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ は一般に t について狭義単調増加関数であり連続であるが，さらに微分可能であり

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2}{\varepsilon} = \frac{da_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{hcap}(\gamma(0,t]) \tag{2.27}$$

が存在するものと仮定する．また定義より $\lim_{\varepsilon \to 0} R_t^\varepsilon = 0$ であるから，上の評価より

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} = \frac{\partial g_t(z)}{\partial t}$$

が存在し，これは次の微分方程式を満たすことが結論される．

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{da_2(t)}{dt}, \quad a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t]). \tag{2.28}$$

ただし，初期条件は $g_0(z) = z$ である．これをレブナーの微分方程式 (Loewner evolution) という．

注 2.4. 上の (2.27) のところで，$a_2(t) = \mathrm{hcap}(\gamma(0,t])$ が微分可能であることを仮定した．一般に $a_2(t)$ は t について狭義単調増加関数であり，連続であることが示せる [7]．したがって，曲線 γ を (時刻 t の代わりに) 半平面 capacity そのものでパラメトライズすることが可能である．特に通常は

$$\overline{\gamma}(t) = \gamma(a_2^{-1}(2t))$$

とおくことにする．この定義より

$$a_2(t) = \mathrm{hcap}(\overline{\gamma}((0,t])) = 2t \tag{2.29}$$

となるので，レブナー方程式は

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \tag{2.30}$$

となる．(以下では，(2.29) である $\overline{\gamma}$ を改めて γ と記すことにする．) この方程式から生成される g_t を特に Loewner chains とよぶ．また U_t をレブナー方程式の駆動関数とよぶことにする．

レブナー方程式に展開式 (2.14) を代入すると，展開係数 $a_n(t)$ に対して階層的な方程式系が得られる：

$$\frac{d}{dt} a_n(t) = 2\mathcal{P}_n(a_1(t), a_2(t), \cdots), \quad n = 2, 3, 4, \cdots. \tag{2.31}$$

ただし

$$a_1(t) = -U_t \tag{2.32}$$

とした．また $\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \cdots)$ は次式で与えられる多項式である (ただし $\mathcal{P}_2 = 1$ とする)：

$$\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{\boldsymbol{m}:|\boldsymbol{m}|=n-2} (-1)^{\ell(\boldsymbol{m})} \prod_{j=1}^{\ell(\boldsymbol{m})} x_{m_j}. \tag{2.33}$$

ここで右辺は $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \cdots), m_j \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \cdots\}$ に対する和であり，$\ell(\boldsymbol{m}) \equiv \boldsymbol{m}$ の成分の数，$|\boldsymbol{m}| \equiv \sum_{j=1}^{\ell(\boldsymbol{m})} m_j$ である．これは，次の漸化式によっても与えられる [2].

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_1 = 0, \qquad \mathcal{P}_2 = 1, \\ &\mathcal{P}_n = -\sum_{j=1}^{n-2} x_j \mathcal{P}_{n-j}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

具体的には

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}a_2(t)=2,\\
&\frac{d}{dt}a_3(t)=-2a_1(t),\\
&\frac{d}{dt}a_4(t)=2\Big\{(a_1(t))^2-a_2(t)\Big\},\\
&\frac{d}{dt}a_5(t)=2\Big\{-(a_1(t))^3+2a_2(t)a_1(t)-a_3(t)\Big\},\\
&\quad\cdots
\end{aligned} \tag{2.35}$$

である．$g_0(z)=z$ なので $a_n(0)=0,\ n=1,2,3,\cdots$ である．駆動関数 $a_1(t)=-U_t$ が与えられると，上の方程式系によりすべての展開係数 $a_n(t), n=2,3,\cdots$ が決まり，共形変換 $g_t(z)$ が定まることになる．つまり，レブナー方程式は無限個の階層的な微分方程式系と等価であることになる．

2.3 SLE$_\kappa$ と BES$_d$

Schramm [10] は, レブナー方程式の駆動関数として

$$U_t=\sqrt{\kappa}B_t, \quad \kappa>0, \quad B_0=0 \tag{2.36}$$

とした．ここで B_t は BM である：

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t(z)=\frac{2}{g_t(z)-\sqrt{\kappa}B_t}, \quad g_0(z)=z. \tag{2.37}$$

この初期値問題の解として得られる (時刻 $t\geq 0$ でパラメトライズされる) 共形変換の族 $\{g_t\}_{t\geq 0}$ を (chordal) シュラム・レブナー発展 (Schramm-Loewner evolution) という．以下ではこれを，パラメータ κ も付して，SLE$_\kappa$ と略記する. ((2.37) はシュラム・レブナー方程式とよぶことにする.)

2.1 節と 2.2 節では，時間 $t\in[0,\infty)$ とともに単調に伸びていく単純曲線 $\gamma=\{\gamma(t):t\in[0,\infty)\}$ を与え，各時刻 $t\in[0,\infty)$ で $\mathbb{H}\setminus\gamma(0,t]\to\mathbb{H}$ となる共形変換 $g_t(z)$ を求める問題を考えた．$g_t(z)$ はレブナー方程式 (2.30) の解として与えられることが分かった．この方程式は

$$U_t=\lim_{s\nearrow t}g_s(\gamma(t)) \tag{2.38}$$

で駆動される形をしていた．これに対して，ここでは U_t を確率過程 (2.36) として与え，確率的なレブナー方程式 (2.37) を解くことにより, ランダムに時間発展する共形変換 $g_t(z)$ を求める問題を考えるのである．この場合にも，(2.38) によって $\gamma(t), 0\leq t<\infty$ が定められることになる．次が知られている．

定理 2.1 *SLE_κ で定められる γ は，確率 1 で曲線である．*

注 2.5. 上の主張は,「確率 1 で，SLE_κ は曲線によって生成される」という言い方でも表現される．また γ は，SLE_κ の道 (SLE_κ path)，または SLE_κ 曲線 (SLE_κ curve) とよばれる．これは，ある確率法則に従うランダムな曲線である．定理 2.1 の証明は難しいので，ここでは述べない．文献 [7] を参照せよ．

SLE_κ γ は一般には単純曲線ではない．以下,

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0,t] \text{ の非有界な連結領域} \\ K_t &= \mathbb{H} \setminus H_t \end{aligned} \tag{2.39}$$

とする．K_t は SLE_κ 曲線 $\gamma[0,t]$ の hull とよばれる．$g_t(z)$ は $H_t \to \mathbb{H}$ の共形変換である．つまり H_t は写像 g_t の定義域である．他方，K_t に対しては，g_t は定義されないことになる．SLE_κ 曲線 γ は時間 t とともに単調に伸びていくものとすると，hull K_t も単調に増大していくことになる．よって g_t の定義域 H_t は単調に減少していくことになる．各 $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$\begin{aligned} T_z &= \sup\left\{t \geq 0 : \text{解 } g_t(z) \text{ が well-defined で } g_t(z) \in \mathbb{H}\right\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : z \in K_t\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

が定義される．これを用いると

$$\begin{aligned} H_t &= \{z \in \mathbb{H} : T_z > t\} \\ K_t &= \{z \in \mathbb{H} : T_z \leq t\} \end{aligned} \tag{2.41}$$

と表せる．

特に SLE_κ 曲線 γ の時刻 $t > 0$ での先端 $\gamma(t)$ は，その時刻での共形写像 g_t で実軸上の点 $\sqrt{\kappa}B_t$ に写されることになる：

$$g_t(\gamma(t)) = \sqrt{\kappa}B_t. \tag{2.42}$$

ただし，厳密に言うと，上述のように g_t の定義域は H_t であり，$\gamma(t) \in K_t$ であって $\gamma(t) \notin H_t$ なので，$g_t(\gamma(t))$ は定義されていない．上の式は，定義域 H_t と値域 $\mathbb{H}$ のいずれにおいても，それぞれの境界上の点への極限として

$$\lim_{z \to \gamma(t)} g_t(z) = \sqrt{\kappa}B_t \tag{2.43}$$

という意味で理解すべきである．

SLE$_\kappa$ 曲線 $\gamma = \{\gamma(t) : 0 \le t < \infty\}$ が与えられたとする．このとき，各時刻 $s \ge 0$ に対して，γ^s を

$$\gamma^s(t) = g_s(\gamma(t+s)) - \sqrt{\kappa} B_s, \quad t \ge 0$$

で与えられる曲線であるとする．このとき，

$$\gamma^s \stackrel{\mathrm{d}}{=} \gamma \qquad \forall s \ge 0 \tag{2.44}$$

が成り立つことになる．この意味で SLE$_\kappa$ はマルコフ性をもつことになる．

第 1 節の命題 1.1 で，BM のスケーリング性 (1.2) が BES$_d$ に遺伝することを見たが，同様にこれは SLE$_\kappa$ にも遺伝する．以下を SLE$_\kappa$ のスケーリング性とよぶことにする．

命題 2.2 任意の $r > 0$ に対して

$$\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) \stackrel{\mathrm{d}}{=} g_t(z) \tag{2.45}$$

が成り立つ．すなわち，$\widetilde{\gamma}(t) \equiv \dfrac{1}{r}\gamma(r^2 t)$ とすると

$$\widetilde{\gamma} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \gamma \tag{2.46}$$

である．

<u>証明.</u> $\widetilde{g}_t(z) = \dfrac{1}{r} g_{r^2 t}(rz)$ とおく．まず初期値は $\widetilde{g}_0(z) = \dfrac{1}{r} g_0(rz) = \dfrac{1}{r} \times rz = z$ なので，$\widetilde{g}_0(z) = g_0(z) = z$ であり，一致している．$\widetilde{B}_t = \dfrac{1}{r} B_{r^2 t}$ とすると，$\widetilde{g}_t(z)$ の従う方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widetilde{g}_t(z) &= \frac{1}{r} \times \frac{d}{dt} g_{r^2 t}(rz) \\
&= \frac{1}{r} \times \frac{2r^2}{g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa} B_{r^2 t}} \\
&= \frac{2}{\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa}\frac{1}{r} B_{r^2 t}} \\
&= \frac{2}{\widetilde{g}_t(z) - \sqrt{\kappa}\widetilde{B}_t}
\end{aligned}$$

である．BM のスケーリング性より $\widetilde{B}_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} B_t$ なので，$\widetilde{g}_t(z)$ も $g_t(z)$ と同じ SLE$_\kappa$ であることになる．従って，分布は等しい．∎

ここで

$$\widehat{g}_t(z) = \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}{\sqrt{\kappa}} \tag{2.47}$$

とすると，$\widehat{g}_t(z)$ は次の確率微分方程式を満たすことになる．

$$d\widehat{g}_t(z)=\frac{2/\kappa}{\widehat{g}_t(z)}dt+dW_t,\quad \widehat{g}_0(z)=\frac{z}{\sqrt{\kappa}},\quad W_t=-B_t. \tag{2.48}$$

T_z の定義 (2.40) より，SLE_κ 曲線 γ は時刻 $t=T_z$ で初めて $z\in\mathbb{H}$ に到達する．つまり $\lim_{t\nearrow T_z}\gamma(t)=z$ であり，この先端 $\gamma(t)$ の像は (2.42) のように $\sqrt{\kappa}B_{T_z}$ であるから，(2.47) より

$$\lim_{t\nearrow T_z}\widehat{g}_t(z)=0$$

となる．つまり，T_z は $z/\sqrt{\kappa}$ から出発して SDE (2.48) に従って動く $\overline{\mathbb{H}}$ 上の点が，初めて原点 0 に到達する時刻ということになる．

特に SDE (2.48) で式で $z\to x\in\mathbb{R}$ としてみると，注 2.1 で述べたように $g_t(x)\in\mathbb{R}, \forall t\geq 0$ なので $\widehat{g}_t(x)\in\mathbb{R}, \forall t\geq 0$ である．したがって，SLE_κ を実軸上で考えたものは，BES_d

$$dX_t^x=\frac{d-1}{2}\frac{1}{X_t^x}dt+dW_t,\quad X_0^x=x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{2.49}$$

で

$$\kappa=\frac{4}{d-1}\quad\Longleftrightarrow\quad d=\frac{4}{\kappa}+1 \tag{2.50}$$

とおいたものに等しい．このときには，明らかに $T_x=\inf\{t\geq 0: X_t^x=0\}$ であり，第 1 節では，この値の次元 d 依存性を議論したのであった．各 x に対して同じ BM, W_t をとることにする．$x<y$ なら $X_t^x<X_t^y, \forall t<T_x$ なので，$T_x\leq T_y$ である．第 1 節の定理 1.2 と 定理 1.4 では次を証明した．

(1) $d\geq 2$ のとき，確率 1 で $T_x=\infty, \forall x>0$.

(2) $1\leq d<2$ のとき，確率 1 で $T_x<\infty, \forall x>0$.

 (2a) $\dfrac{3}{2}<d<2$ のとき，$0<x<y$ に対して, $\mathbf{P}\{T_x=T_y\}>0$.

 (2b) $1\leq d\leq\dfrac{3}{2}$ のとき，$0<x<y$ ならば確率 1 で $T_x<T_y$.

これに対応して，SLE_κ で生成される曲線 γ には, パラメータ κ の値に応じて, 次のような 3 つの相があることが導かれる．

定理 2.3 *(i)* $0<\kappa\leq 4$ のとき，γ は単純曲線であり，$\gamma(0,\infty)\subset\mathbb{H}$ である．また，このとき確率 1 で

$$\lim_{t\to\infty}|\gamma(t)|=\infty. \tag{2.51}$$

(ii)　$4 < \kappa < 8$ のとき，γ は自分自身や実軸と接することがあるが，確率 1 で

$$\bigcup_{t>0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}} \tag{2.52}$$

である．よって，$|\gamma(t)| \to \infty$ である．しかし

$$\gamma[0,\infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H} \tag{2.53}$$

である．つまり，$\mathbb{H}$ 全体を埋めつくすことはない．

(iii)　$\kappa \geq 8$ のとき，γ は $\overline{\mathbb{H}}$ のすべての点を埋めつくす；

$$\gamma[0,\infty) = \overline{\mathbb{H}}. \tag{2.54}$$

<u>証明.</u> (i) $0 < \kappa \leq 4 \iff d \geq 2$ である．このとき BES_d では確率 1 で $T_x = \infty, \forall x > 0$ なので（$\mathbb{H}$ での虚軸に対する鏡像対称性から $x < 0$ に対しても同様であるから), 確率 1 で $\gamma(0,\infty) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ であることになる．つまり $\gamma(0,\infty) \subset \mathbb{H}$ である．上述の SLE_κ のマルコフ性 (2.44) より, 任意の $s \geq 0$ に対して確率 1 で $\gamma^s(0,\infty) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ でもあることになる．このことは $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), \forall t_1 < t_2$ を意味する．なぜならば，もしも $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ となる 2 時刻 $t_1 < t_2$ があったとすると，$s \in (t_1, t_2)$ なる各時刻 s に対しては，$\gamma^s(0,\infty) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ であるはずだからである．よって，単純曲線であることが示せた．次に，(2.51) を示す．$b = \liminf_{t\to\infty} |\gamma(t)|$ とおく．SLE_κ のスケーリング性より，時間が経てばその分 γ の占める領域は増えるので $\mathbf{P}(b \geq r)$ はすべての $r > 0$ に対して等しい．よって $\mathbf{P}(b > 0) = 1$ を証明すれば，確率 1 で $b = \infty$ であることが結論される．$r \in (0,1)$ に対して，$\sigma_r = \min\{t : |\gamma(t) - 1| \leq r\}$ とする．r をいくら小さくしても，常に $\sigma_r < \infty$ であるならば，この時刻では $g_{\sigma_r}(1) - \sqrt{\kappa} B_{\sigma_r} < \mathrm{const.} \times r$ となるので，$\inf_t \widehat{g}_t(1) = 0$ であることになる．ところが，定理 1.2 より $d > 2\,(\Leftrightarrow\ \kappa < 4)$ のときには $\inf_t \widehat{g}_t(1) > 0$ である．したがって確率 1 で，ある $r > 0$ に対して $\sigma_r = \infty$ であることになる．つまり SEL_κ 曲線 γ は実軸から離れていくことになり，$\mathbf{P}(b > 0) = 1$ が導かれる．$\kappa = 4$ の場合に (2.51) を証明するには，さらに詳しい議論が必要になるので，ここでは省略する．参考文献 [7] p.151 の Proposition 6.12 の証明を見よ．

(ii) 点 $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ が，$T_z < \infty$ であるが，$z \notin \overline{\cup_{t<T_z} K_t}$ であるとき，z は (時刻 T_z で hull に) 呑み込まれた (swallowed) と言うことにする．z が呑み込まれたならば，z を中心とするある円領域 B があって，その内点はすべて z と一緒に呑み込まれることになる ($T_w = T_z, w \in \mathrm{B}$)．定理 1.4(i) では，$4 < \kappa < 8\,(\Leftrightarrow\ 3/2 < d < 2)$ のときには，正の確率で $T_x = T_1$ となる $x > 1$ があることを示した．いまの SLE_κ 曲線の言葉で言えば，$\gamma(T_1)$ は $T_x = T_1$ となる最大の実数 x であり，そのような $x > 1$

は確率 1 で存在することになる．$\varepsilon = \mathrm{dist}(1, \gamma[0, T_1]) > 0$ とすると，$\mathbb{H} \cap \mathrm{B}(1, \varepsilon)$ の内点はすべて同時に呑み込まれることになる．よって (2.53) である．実軸上の 1 と -1 が両方とも呑み込まれる最初に時刻を T とすると, $\mathrm{B}' \cap \mathbb{H} \subset K_T$ となるような原点を中心とするある円領域 B' があることになる．つまり，任意の $u > 0$ に対して，$\varepsilon > 0$ が取れて $\mathbf{P}(\mathrm{B}(0, \varepsilon) \cap \mathbb{H} \subset K_T) \geq 1 - 2u$ と出来る．ゆえに，ある時刻 $t = t_{\varepsilon, u}$ だけ待てば，$\mathbf{P}(\mathrm{B}(0, \varepsilon) \cap \mathbb{H} \subset K_t) \geq 1 - u$ となる．SLE_κ のスケーリング性より，どんな ε の値に対しても，十分時間が経てばこの不等式が成り立つことになるから，(2.52) が結論される．

(iii) 定理 1.4(ii) より，$8 \leq \kappa < \infty\, (\Leftrightarrow\ 1 < d \leq 3/2)$ では，全ての $x > 0$ に対して $x \in \gamma[0, \infty)$ である．よって，すべての $x \in \mathbb{R}$ は $\gamma[0, \infty)$ に含まれることになる．このことから (2.54) が導かれる．(稠密性について議論が必要である．詳しくは，参考文献 [7] の 7 章を参照せよ．) ∎

注 2.6. 2 次元格子上の統計物理模型の連続 (スケーリング) 極限と，次のように対応していることが “知られている [4]”．

$$
\begin{aligned}
\kappa = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{loop-erased random walk (LERW)} \\
\kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{self-avoiding walk (SAW)} \\
\kappa = 4 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界 4 状態ポッツ模型} \\
\kappa = \frac{24}{5} = 4.8 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界 3 状態ポッツ模型} \\
\kappa = \frac{16}{3} = 5.\dot{3} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界イジング模型} \\
\kappa = 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{臨界パーコレーション模型} \\
\kappa = 8 \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{uniform spanning tree (UST)}
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

(q 状態ポッツ模型の $q = 2$ がイジング模型，$q = 1$ がパーコレーション模型，$q = 0$ が UST にそれぞれ対応する．κ との対応は $q = 2 + 2\cos(8\pi/\kappa), 4 \leq \kappa \leq 8$ と思われている.) 上のような対応を厳密に証明するには，SLE の話とは別に，格子模型の連続極限の存在とそこでの共形不変性を示さなければならない．$\kappa = 2$ (LERW) の場合は正方格子上に対して [9] によって厳密な証明が与えられている．また, $\kappa = 6$ の場合には，三角格子上の臨界パーコレーションに対して Smirnov によって証明が与えられている [11]. 最近 Smirnov は，臨界イジング模型と SLE に関する論文を発表している (arXiv: math-ph で得られる).

2.4 SLE マルチンゲール

再び $g_t(z)$ の展開係数 $a_n(t), n=1,2,3,\cdots$ を考える．SLE$_\kappa$ では

$$a_1(t) = -U_t = -\sqrt{\kappa}B_t \tag{2.56}$$

としたので，$a_n(t)$ は一般には確率過程となる ($a_2(t)=2t$ は決定論的). 上のように $a_1(t)$ はマルチンゲールであるが，(2.35) は $a_n(t)$, $n \geq 2$ は有界変動過程であることを示している．$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots)$, $\boldsymbol{a}(t)=(a_1(t),a_2(t),\cdots)$ と書くことにする．$Q(\boldsymbol{x})$ を多変数 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の実係数多項式としたとき，確率過程 $Q(\boldsymbol{a}(t))$ に対する確率微分方程式は, 伊藤の公式より

$$dQ(\boldsymbol{a}(t)) = \left[-\sqrt{\kappa}dB_t\frac{\partial}{\partial x_1} + dt\left(\frac{\kappa}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\sum_{n\geq 2}\mathcal{P}_n(\boldsymbol{x}(t))\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\right] Q(\boldsymbol{x}(t))\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}(t)}$$

で与えられる．ここで $(da_1(t))^2 = \kappa dt$ と (2.31) を用いた．したがって，微分演算子

$$\mathcal{A} = \frac{\kappa}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\sum_{n\geq 2}\mathcal{P}_n(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_n} \tag{2.57}$$

を定義して，$\mathcal{A}M(\boldsymbol{x})=0$ なる多項式 $M(\boldsymbol{x})$ が得られると，局所マルチンゲール $M(\boldsymbol{a}(t))$ が求められることになる．このような局所マルチンゲールは，多変数 $\{x_n\}_{n\geq 2}$ の階層性に従って

$$\begin{aligned}
&a_1(t) \\
&2(a_1(t))^2 - \kappa a_2(t) \\
&2(a_1(t))^3 - 3\kappa a_1(t)a_2(t) \quad \text{および} \quad a_3(t) + a_1(t)a_2(t) \\
&\quad \cdots
\end{aligned} \tag{2.58}$$

というように階層的に定めていくことができる．これらは SLE マルチンゲールとよばれている [2].

Bauer と Bernard によって，これらのマルチンゲールの成す代数構造とビラソロ代数の中心元 $c=(3\kappa-8)(6-\kappa)/2\kappa$ と共形次元 (最高ウェイト) $h=(6-\kappa)/2\kappa$ で指定される表現 (共形場理論) との関係が詳しく研究されている [2].

3　共形制限性

3.1　複素 BM の共形不変性と制限性

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の複素 BM を考える；

$$\mathcal{B}_t = B_t^1 + \mathrm{i}\, B_t^2, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}. \tag{3.1}$$

($B_0 = 0$ である.) 原点 0 を含む単連結領域 D を考える．($D \subset \mathbb{C}$, ただし $D \neq \mathbb{C}$ とする.) D の境界を ∂D と記す．$\mathcal{B}_t$ が領域 D から外に最初に出ていく時刻を

$$T = \inf\{t \geq 0 : \mathcal{B}_t \notin D\} \tag{3.2}$$

とする．以下では，$t \leq T$ の複素 BM を考え，領域 D 内の道の確率法則を調べることにする．

Ψ を D から別の単連結領域 $\widetilde{D}\,(\widetilde{D} \neq \mathbb{C})$ への共形変換とする；

$$\Phi\,:\,D \mapsto \widetilde{D} \quad \text{共形変換}. \tag{3.3}$$

この変換により，先の複素 BM は，$\Phi(0)$ を出発して，$\widetilde{D}$ から最初に出ていく時刻 $\widetilde{T}$ までの複素 BM に写される．ここで

$$\widetilde{T} = \int_0^T |\Phi'(\mathcal{B}_s)|^2 ds \tag{3.4}$$

である．より正確にいうと，複素 BM, $\mathcal{B}_t, t \in [0, T]$ は，時間変更

$$t \,\to\, r(t) = \int_0^t |\Phi'(\mathcal{B}_s)|^2 ds$$

された複素 BM, $\widetilde{\mathcal{B}}_{r(t)}$ に写されることになる；

$$\Phi(\mathcal{B}_t) = \widetilde{\mathcal{B}}_{\int_0^t |\Phi'(\mathcal{B}_s)|^2 ds}. \tag{3.5}$$

ここで, $\widetilde{\mathcal{B}}.$ は $\Phi(0)$ を出発して, 時刻 $\widetilde{T}$ で $\widetilde{D}$ から外に初めて出ていく複素 BM である．このように, 適当な時間変更を行う必要はあるが，共形変換によって複素 BM, $\mathcal{B}.$ は複素 BM, $\widetilde{\mathcal{B}}.$ に写されることから,「複素 BM は共形不変である」といわれる．

次に，$D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ を単連結領域として，その境界上に相異なる 2 つの点 $A, B \in \partial D, A \neq B$ をとる．そして，点 A から点 B へ至る領域 D 内の複素 BM の道の確率法則を $\mathbf{P}_{D;A,B}^{\mathrm{BM}}$ と書くことにする．その上で，共通の境界上の 2 点 $A, B \in \partial D \cap \partial D'$ をもつような，D の部分集合 $D' \subset D$ を考えることにする．

$\mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D;A,B}$ に従う複素 BM の道 ω に対して，$\omega \subset D'$ という条件を課すことにする．この条件付きの複素 BM の道の確率法則を $\mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D;A,B}\Big|\{\omega \subset D'\}$ と書くことにすると，次が成り立つ；

$$\mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D;A,B}\Big|\{\omega \subset D'\} = \mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D';A,B}, \quad {}^{\forall}D' \subset D, \quad {}^{\forall}A, B \in \partial D \cap \partial D', A \neq B. \tag{3.6}$$

この性質を制限性 (restriction property) とよぶ [12].

以上の考察から，$\mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D;A,B}$ が与えられたとき，共通の境界点 $A, B \in \partial D \cap \partial D'$ をもつような部分領域 $D' \subset D$ に対して $\mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D';A,B}$ を得るのに，次の 2 つの異なる方法があることが分かる；

(i) 道を D' に制限する；$\mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D;A,B}\Big|\{\omega \subset D'\}$.

(ii) リーマンの写像定理より，A, B を不動点とする D から D' への共形写像 Φ の存在が保証されている (付録 A を参照)．この Φ で $\mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D;A,B}$ を写像する；$\Phi \circ \mathbf{P}^{\mathrm{BM}}_{D;A,B}$.

別の言い方をすれば，複素 BM の道に対する確率法則は

$$\mathbf{P}_{D;A,B}\Big|\{\omega \subset D'\} = \Phi \circ \mathbf{P}_{D;A,B} \tag{3.7}$$

という等価性を満たすものとして特徴付けられるのである．

3.2 共形制限性

単連結領域 $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ 内の，∂D 上の点 A から ∂D 上の点 $B\,(B \neq A)$ への道に対する確率測度の族 $\{\mathbf{P}_{D;A,B}\}$ を考える．次の条件を満たすとき，この確率測度の族は共形制限性 (conformal restriction property) をもつという．

(i) 任意の領域 $D' \subset D$, $A, B \in \partial D \cap \partial D', A \neq B$ に対して

$$\mathbf{P}_{D;A,B}\Big|\{\omega \subset D'\} = \mathbf{P}_{D';A,B}. \tag{3.8}$$

(ii) D に対する任意の共形変換 Φ に対して

$$\Phi \circ \mathbf{P}_{D;A,B} = \mathbf{P}_{\Phi(D);\Phi(A),\Phi(B)} \qquad \text{mod 時間変更}. \tag{3.9}$$

ただしここで，A から B への道のパラメータを時間とよぶ．

先の複素 BM の道に対する確率測度の族は，共形制限性をもつものの一例である．この定義より，族 $\{\mathbf{P}_{D;A,B}\}$ はある一つの組 $(D; A, B)$ に対して確率測度を与えれば，定められることになる．以下では特に，$D = \mathbb{H}$ (上半複素平面), $A = 0, B = \infty$ の場合を考えることにする．

いま，族 $\{\mathbf{P}_{D;A,B}\} \ni \mathbf{P}_{\mathbb{H};0,\infty}$ が共形制限性をもつとする．また，γ を確率法則 $\mathbf{P}_{\mathbb{H};0,\infty}$ に従うランダムな曲線とする．(よって γ は 0 から ∞ に至る $\mathbb{H}$ 内の曲線である．γ のパラメータを「時間」とよぶことにする.) すると，次が成り立つ.

(R1)　任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda\gamma \text{ の確率法則} = \gamma \text{ の確率法則} \qquad \mathrm{mod} \quad \text{時間変更}.$$

(R2)　$H \subset \mathbb{H}$ を 0 と ∞ を境界上の点にもつ領域とする．($\mathbb{H} \setminus H$ を，有界で ∞ は境界の点として持たないものとする.) このような H に対して

$$\Phi_H : H \to \mathbb{H} \quad \text{共形変換}, \quad \Phi_H(0) = 0, \quad \Phi_H(z) \sim z \quad (z \to \infty)$$

とすると（リーマンの写像定理より，このような Φ_H は一意的に定まることが保証されている．付録 A を参照.)

$$\gamma \text{ の確率法則}\Big|\{\gamma \subset H\} = \Phi_H^{-1}(\gamma) \text{ の確率法則}.$$

逆に，上の 2 つの条件を満たす ($\mathbb{H}$ 内で 0 から ∞ に至る) ランダムな曲線 γ (の統計集団) が与えられると，任意の $(D; A, B), D \in \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}, A, B \in \partial D$ に対して

$$\Psi : \mathbb{H} \to D \quad \text{共形変換}, \quad \Psi(0) = A, \quad \Psi(\infty) = B$$

による曲線の像 $\Psi(\gamma)$ が従う確率測度 $\mathbf{P}_{D;A,B}$ が得られるので，共形制限性をもつ確率測度の族 $\{\mathbf{P}_{D;A,B}\}$ が得られる．このため，上の 2 条件 (R1), (R2) を満たすとき「ランダムな曲線 γ は共形制限性をもつ」ということにする．

3.3　制限指数

0 から ∞ に至る $\mathbb{H}$ 内のランダムな曲線 γ が共形制限性を満たすとする．いま，$H \subset \mathbb{H}, 0, \infty \in \partial H$ に対して，

$$\Phi_H : H \to \mathbb{H} \quad \text{共形変換}, \quad \Phi_H(0) = 0, \quad \Phi_H(z) \sim z \quad (z \to \infty)$$

とする．ランダムな曲線が領域 H から外に出ない確率 $\mathbf{P}(\gamma \subset H)$ を共形変換 Φ_H のある関数と見て

$$\mathbf{P}(\gamma \subset H) = f(\Phi_H)$$

と書くことにする．

γ の共形制限性より，$\gamma \subset H$ という条件の下では，$\Phi_H(\gamma)$ の確率法則は, 元来の γ の確率法則に等しい．よって，この γ がさらに別の領域 $H' \subset \mathbb{H}$ に対して $\gamma \subset H'$ である確率は，この条件の下では $f(\Phi_{H'})$ である．以上の考察は

$$\begin{aligned}
f(\Phi_{H'} \circ \Phi_H) &= \mathbf{P}(\gamma \subset \Phi_H^{-1} \circ \Phi_{H'}^{-1}(\mathbb{H})) \\
&= \mathbf{P}(\gamma \subset \Phi_H^{-1} \circ \Phi_{H'}^{-1}(\mathbb{H}) | \gamma \subset \Phi_H^{-1}(\mathbb{H}))\mathbf{P}(\gamma \subset \Phi_H^{-1}(\mathbb{H})) \\
&= \mathbf{P}(\gamma \subset \Phi_H^{-1} \circ \Phi_{H'}^{-1}(\mathbb{H}) | \gamma \subset H)\mathbf{P}(\gamma \subset H) \\
&= \mathbf{P}(\Phi_H(\gamma) \subset \Phi_{H'}^{-1}(\mathbb{H}) | \gamma \subset H)\mathbf{P}(\gamma \subset H) \\
&= \mathbf{P}(\gamma \subset \Phi_{H'}^{-1}(\mathbb{H}))\mathbf{P}(\gamma \subset H) \\
&= f(\Phi_{H'}) \times f(\Phi_H)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

と表せる．この乗法性から，次が導かれる [8].

定理 3.1 ランダムな曲線 γ が共形制限性をもつとする．するとある指数 $h > 0$ があり

$$\mathbf{P}(\gamma \subset H) = (\Phi'_H(0))^h, \quad {}^\forall H \subset \mathbb{H}, \quad H \neq \mathbb{H} \tag{3.11}$$

が成り立つ．この指数 h を制限指数 *(restriction exponent)* とよぶ.

注 3.1. 複素 BM の道は共形制限性をもつが，その制限指数は $h = 1$ であることが示せる.

3.4 $\mathrm{SLE}_{8/3}$ の共形制限性とシュバルツ微分

γ を SLE_κ 曲線とする．ただし，$\kappa \leq 4$ として，γ が 0 から ∞ に至る単純曲線とする．これが共形制限性をもつものと仮定する；

$${}^\exists h > 0 \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{P}(\gamma \subset H) = (\Phi'_H(0))^h \quad {}^\forall H \in \mathbb{H}, \quad H \neq \mathbb{H}. \tag{3.12}$$

いま，ある時刻 $t < \infty$ を選び,

$$\text{共形変換} \quad g_t : \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad \rightarrow \quad \mathbb{H}$$

を考える．この変換で，時刻 t 以降の (未来の) 曲線部分を写すと，得られる像は実軸上の $g_t(\gamma(t)) = U_t = \sqrt{\kappa} B_t$ を出発点として ∞ に至る曲線となるが，共形制限性より，この曲線の確率法則は，元来の $\gamma = \gamma[0, \infty)$ の確率法則と等しいことになる．よって，仮定 (3.12) より，任意の $H' \in \mathbb{H}$ に対して

$$\mathbf{P}\Big(g_t(\gamma[t, \infty)) - U_t \subset H' \Big| \gamma[0, t]\Big) = (\Phi'_{H'}(0))^h \tag{3.13}$$

である．ところが，$\gamma=\gamma[0,\infty)\in H$ が成り立っている場合には，当然 $\gamma[t,\infty)\in H$ でもあるから，これを g_t で変換すると $g_t(\gamma[t,\infty))\subset g_t(H)$ が成り立つ．よって, (3.13) を $H'=g_t(H)-U_t$ の場合に適用すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\gamma\subset H|\gamma[0,t]) &= \mathbf{P}\Big(g_t(\gamma[t,\infty))-U_t\subset g_t(H)-U_t\Big|\gamma[0,t]\Big)\\ &= (\Phi'_{g_t(H)-U_t}(0))^h=(\Phi'_{g_t(H)}(U_t))^h \end{aligned}\tag{3.14}$$

が得られる．(最後の等式は並進対称性を用いた.) 当然

$$\mathbf{E}\Big[\mathbf{P}(\gamma\subset H|\gamma[0,t])\Big|\mathcal{F}_s\Big]=\mathbf{P}(\gamma\subset H|\gamma[0,s])\quad {}^\forall s\le t \tag{3.15}$$

が成り立つので，$(\Phi'_{g_t(H)}(U_t))^h$ という量は，マルチンゲールであることが結論される．

$H\subset\mathbb{H}$ を固定して，

$$h_t=\Phi_{g_t(H)}$$

と書くことにする．伊藤の公式 (1.7) を用いると，次の SDE を導くことができる；

$$d(h_t'(U_t))^h = h(h_t'(U_t))^h\left[\sqrt{\kappa}\frac{h_t''(U_t)}{h_t'(U_t)}dB_t+\left\{\frac{(h-1)\kappa+1}{2}\frac{(h_t''(U_t))^2}{(h_t'(U_t))^2}-\frac{8-3\kappa}{6}\frac{h'''(U_t)}{h_t'(U_t)}\right\}dt\right]. \tag{3.16}$$

導出方法は，付録 B に示した．SLE$_\kappa$ のパラメータ κ と制限指数 h を

$$(h-1)\kappa+1=0,\quad 8-3\kappa=0\quad\Longleftrightarrow\quad \kappa=\frac{8}{3},\quad h=\frac{5}{8} \tag{3.17}$$

とすると，ドリフト項$=0$ となり，$(h_t'(U_t))^h=(\Phi'_{g_t(H)}(U_t))^h$ は局所マルチンゲールとなる．以上より，次が示せたことになる．

定理 3.2 *SLE*$_\kappa$ 曲線は $\kappa=\dfrac{8}{3}$ のときに限り，共形制限性をもつ．そのときの制限指数は $h=\dfrac{5}{8}$ である．

ここで

$$h=h(\kappa)=\frac{6-\kappa}{2\kappa} \tag{3.18}$$

とおくことにする．すると (3.16) は

$$d(h_t'(U_t))^h=h(h_t'(U_t))^h\left\{\sqrt{\kappa}\frac{h_t''(U_t)}{h_t'(U_t)}dB_t-\frac{8-3\kappa}{6}S_{h_t}(U_t)dt\right] \tag{3.19}$$

となる．ただしここで, S_f は写像 f のシュバルツ微分

$$S_f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\frac{(f'')^2}{(f')^2} \tag{3.20}$$

を表す.

新たにパラメータ λ を導入して

$$M_t = (h_t'(U_t))^h \exp\left\{\frac{\lambda}{6}\int_0^t S_{h_s}(U_s)ds\right\} \tag{3.21}$$

とおくと,

$$dM_t = d(h_t'(U_t))^h \exp\left\{\frac{\lambda}{6}\int_0^t S_{h_s}(U_s)ds\right\} + (h_t'(U_t))^h \exp\left\{\frac{\lambda}{6}\int_0^t S_{h_s}(U_s)ds\right\}\frac{\lambda}{6}S_{h_t}(U_t)dt$$

なので，(3.19) を代入すると

$$dM_t = h\sqrt{\kappa}M_t\frac{h_t''(U_t)}{h_t'(U_t)}dB_t + \frac{1}{6}\Big\{\lambda - (8-3\kappa)h\Big\}S_{h_t}(U_t)M_t dt \tag{3.22}$$

となる．したがって,

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\kappa) = (8-3\kappa)h(\kappa) \\ &= \frac{(8-3\kappa)(6-\kappa)}{2\kappa} \end{aligned} \tag{3.23}$$

とすると，M_t は $\kappa \neq 8/3$ であっても，マルチンゲールであることになる.

注 3.2. ビラソロ代数のレベル 2 の退化表現では，最高ウェイト (共形次元) h とビラソロ代数の中心元 c とが，カッツの公式

$$h = \frac{1}{16}\Big\{5 - c \pm \sqrt{(1-c)(25-c)}\Big\} \quad \Longleftrightarrow \quad c = \frac{2h(5-8h)}{1+2h} \tag{3.24}$$

で関係付けられている．(3.18) の h を (3.24) に代入すると

$$c = \frac{2\{(6-\kappa)/2\kappa\}\{5-8(6-\kappa)/2\kappa\}}{1+2(6-\kappa)/2\kappa} = \frac{(3\kappa-8)(6-\kappa)}{2\kappa}$$

となる．つまり，(3.23) のパラメータ λ は，ビラソロ代数の中心元 c と

$$\lambda = -c \tag{3.25}$$

という関係にあることになる.

4　境界相関関数と Witt 代数

4.1　境界相関関数と Ward-高橋恒等式

γ を共形制限性をもつランダムな単純曲線とする．これは，原点を出発し，$\mathbb{H}$ 内を通過して ∞ に至るものとする．$x>0, \varepsilon>0$ に対して，事象

$$E_\varepsilon(x)=\{\gamma\cap[x,x+\mathrm{i}\,\varepsilon\sqrt{2}]\neq\emptyset\} \tag{4.1}$$

を考える．$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$ に対して，$E_{\varepsilon_j}(x_j), 1\leq j\leq n$ を考えることにすると，仮定した γ の共形制限性 (定理 3.1) より，ある制限指数 $h>0$ があって

$$\mathbf{P}\Big(\gamma\subset\mathbb{H}\setminus\bigcup_{j=1}^{n}[x_j,x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]\Big)=\Big(\Phi'_{\mathbb{H}\setminus\bigcup_{j=1}^{n}[x_j,x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]}(0)\Big)^h$$

なので，

$$\mathbf{P}\Big(E_{\varepsilon_1}(x_1)\cup\cdots\cup E_{\varepsilon_n}(x_n)\Big)=1-\Big(\Phi'_{\mathbb{H}\setminus\cup_{j=1}^{n}[x_j,x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]}(0)\Big)^h \tag{4.2}$$

である．

$$f(x_1,\varepsilon;\cdots;x_n,\varepsilon_n)=\mathbf{P}(E_{\varepsilon_1}(x_1)\cap\cdots\cap E_{\varepsilon_n}(x_n)) \tag{4.3}$$

と書くことにする．まず $n=1$ とすると

$$f(x,\varepsilon)=\mathbf{P}(E_\varepsilon(x))=1-\Big(\Phi'_{\mathbb{H}\setminus[x,x+\mathrm{i}\,\varepsilon\sqrt{2}]}(0)\Big)^h \tag{4.4}$$

である．また

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E_{\varepsilon_1}(x_1)\cup E_{\varepsilon_2}(x_2)) &= \mathbf{P}(E_{\varepsilon_1}(x_1))+\mathbf{P}(E_{\varepsilon_2}(x_2))-\mathbf{P}(E_{\varepsilon_1}(x_1)\cap E_{\varepsilon_2}(x_2))\\ &= f(x_1,\varepsilon_1)+f(x_2,\varepsilon_2)-f(x_1,\varepsilon_1;x_2,\varepsilon_2)\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}f(x_1,\varepsilon_1;x_2,\varepsilon_2) &= 1-\Big(\Phi'_{\mathbb{H}\setminus[x_1,x+\mathrm{i}\,\varepsilon_1\sqrt{2}]}(0)\Big)^h-\Big(\Phi'_{\mathbb{H}\setminus[x_2,x_2+\mathrm{i}\,\varepsilon\sqrt{2}]}(0)\Big)^h\\ &\quad+\Big(\Phi'_{\mathbb{H}\setminus[x_1,x+\mathrm{i}\,\varepsilon_1\sqrt{2}]\cup[x_2,x+\mathrm{i}\,\varepsilon_2\sqrt{2}]}(0)\Big)^h\end{aligned} \tag{4.5}$$

である．同様に inclusion-exclusion の関係から，$f(x_1,\varepsilon;\cdots;x_n,\varepsilon_n)$ は共形変換 $\Phi_{\mathbb{H}\setminus\cup_{j=1}^{k}[x_j,x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]}, k=1,2,\cdots,n$ と h の値が与えられれば，定めることができる．

ここで一般に，$\Phi_{\mathbb{H}\setminus\cup_{j=1}^{k}[x_j, x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]}$ は Schwarz-Christoffel 変換として求められる．特に $k=1$ のときは

$$f(x,\varepsilon) = \mathbf{P}(E_\varepsilon(x)) = 1 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2\varepsilon^2}}\right)^h \tag{4.6}$$

で与えられる．

$$f(x,\varepsilon) = 1 - \left(1+\frac{2\varepsilon^2}{x^2}\right)^{-h/2} \simeq \frac{\varepsilon^2 h}{x^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$$

なので．

$$B_1^{(h)}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} f(x,\varepsilon) \tag{4.7}$$

という極限が存在し

$$B_1^{(h)}(x) = \frac{h}{x^2} \tag{4.8}$$

と定まる．同様にして，一般に

$$B_n^{(h)}(x_1,\cdots,x_n) = \lim_{\varepsilon_1\to 0,\cdots,\varepsilon_n\to 0} \varepsilon_1^{-2}\cdots\varepsilon_n^{-2} f(x_1,\varepsilon_1;\cdots;x_n,\varepsilon_n) \tag{4.9}$$

という極限が存在することが示せる．

注 4.1. 複素 BM の $\mathbb{H}$ 内の 0 から ∞ への道は共形制限性をもつ. (制限指数は $h=1$ である.) これは 2 節で導入した $\mathbb{H}$-excursion $\widehat{\mathcal{B}}_t = B_t + \mathrm{i}\,X_t$ (B_t は BM, X_t は BES_3) で実現される．このことより，この場合には

$$B_n^{(1)}(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{(x_{\sigma(j)}-x_{\sigma(j-1)})^2} \tag{4.10}$$

というように顕に定められる．ただしここで，S_n は $\{1,\cdots,n\}$ の置換全体.

一般に $B_n^{(h)}$ は n に関する次のような漸化式を満たすことが証明できる．ただし，$B_0^{(h)}\equiv 1$ とする．この関係式は，共形場理論における Ward-高橋恒等式 (Ward-Takahashi identities) と同様のものである．

命題 4.1 任意の $n=0,1,2,\cdots,x,x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$ に対して

$$\begin{aligned} B_{n+1}^{(h)}(x,x_1,\cdots,x_n) &= \frac{h}{x^2}B_n^{(h)}(x_1,\cdots,x_n) \\ &- \sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{x_j-x}+\frac{1}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{2}{(x_j-x)^2}\right\}B_n^{(h)}(x_1,\cdots,x_n) \end{aligned} \tag{4.11}$$

が成り立つ．

証明. $E=E_\varepsilon(x_1)\cap\cdots E_\varepsilon(x_n)$ という事象 (曲線 γ が長さ $\sqrt{2}\varepsilon$ の n 個のスリットのすべてを通過する) を考える．別の点 $x\in\mathbb{R}$ と微小量 δ を選び，スリット $[x,x+\mathrm{i}\,\delta\sqrt{2}]$ を追加する．曲線 γ は，さらにこの追加されたスリットも通過するか，通過しないかのいずれかである．したがって

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{P}(E\cap E_\delta(x))=f(x_1,\varepsilon;\cdots;x_n,\varepsilon;x,\delta) \\ A' &= \mathbf{P}(\,E\,|\,\gamma\cap[x,x+\mathrm{i}\,\delta\sqrt{2}]=\emptyset) \end{aligned}$$

とおくと

$$\mathbf{P}(E)=A+A'\,\mathbf{P}(\gamma\cap[x,x+\mathrm{i}\,\delta\sqrt{2}]=\emptyset) \tag{4.12}$$

という等式が成り立つはずである．

まず, $\delta\to 0$ かつ $\varepsilon\to 0$ のときには

$$A\simeq\varepsilon^{2n}\delta^2B^{(h)}_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,x)$$

である．また

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\equiv \Phi_{\mathbb{H}\setminus[x,x+\mathrm{i}\,\delta\sqrt{2}]}(z) \\ &= \sqrt{(z-x)^2+2\delta^2}-\sqrt{x^2+2\delta^2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

である．曲線 γ に共形制限性を仮定したので，$\gamma\cap[x,x+\mathrm{i}\,\delta\sqrt{2}]=\emptyset$ という条件の下では

$$\text{共形変換}\quad \varphi(z)\,:\,\mathbb{H}\setminus[x,x+\mathrm{i}\,\delta\sqrt{2}]\quad\to\quad\mathbb{H}$$

で変換された曲線 γ の確率法則は，もともとの γ の確率法則に等しい．よって

$$\begin{aligned} A' &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{\gamma\cap\varphi([x_j,x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon\sqrt{2}])\neq\emptyset\right\}\right) \\ &\simeq f(\varphi(x_1),\varepsilon\varphi'(x_1);\cdots;\varphi(x_n),\varepsilon\varphi'(x_n)) \\ &\simeq \varepsilon^{2n}\prod_{j=1}^{n}|\varphi'(x_j)|^2B^{(h)}(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)),\quad \varepsilon\to 0 \end{aligned}$$

である．上のはじめの $\simeq$ では,

$$\begin{aligned} \varphi([x_j,x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon\sqrt{2}]) &\simeq [\varphi(x_j),\varphi(x_j+\mathrm{i}\,\varepsilon\sqrt{2})] \\ &\simeq [\varphi(x_j),\varphi(x_j)+\mathrm{i}\,\varepsilon\varphi'(x_j)\sqrt{2}],\qquad \varepsilon\to 0 \end{aligned}$$

という近似を用いた．ここで, (4.13) より，$\delta \to 0$ で

$$\varphi(z) = z + \delta^2 \left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{x} \right) + o(\delta^2),$$

よって

$$\varphi'(z) = 1 - \frac{\delta^2}{(z-x)^2} + o(\delta^2)$$

である．また，曲線 γ の共形制限性より，制限指数 h があって

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\gamma \cap [x, x + \mathrm{i}\,\delta\sqrt{2}] = \emptyset) &= \left(\varphi'(0)\right)^h \\ &= 1 - \frac{h\delta^2}{x^2} + o(\delta^2) \end{aligned}$$

である．以上を，等式 (4.12) に代入すると，$\varepsilon \to 0, \delta \to 0$ において

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2n} B_n^{(h)}(x_1, \cdots, x_n) \\ = \;& \varepsilon^{2n} \delta^2 B_{n+1}^{(h)}(x_1, \cdots, x_n, x) \\ + \;& \varepsilon^{2n} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\delta^2}{(x_j - x)^2} \right)^2 B^{(h)} \left(x_1 + \delta^2 \left(\frac{1}{x_1 - x} + \frac{1}{x} \right), \cdots, x_n + \delta^2 \left(\frac{1}{x_n - x} + \frac{1}{x} \right) \right) \\ & \qquad \times \left(1 - \frac{h\delta^2}{x^2} \right) + o(\delta^2). \end{aligned}$$

δ で展開して，両辺の δ^2 の項を等値すると，(4.11) が得られる．∎

$N \in \mathbb{Z} \equiv \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ に対して，微分演算子を

$$\mathcal{L}_N = \sum_j \left\{ -x_j^{1+N} \frac{\partial}{\partial x_j} - 2(N+1) x_j^N \right\} \tag{4.14}$$

と定義する．これらは，次の交換関係 (Witt 代数) を満たす

$$[\mathcal{L}_N, \mathcal{L}_M] = (N - M)\mathcal{L}_{N+M}. \tag{4.15}$$

この微分演算子を用いると，Ward-高橋恒等式 (命題 4.1) は

$$B_{n+1}^{(h)}(x, x_1, \cdots, x_n) = \frac{h}{x^2} B_n^{(h)}(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{N \geq 1} x^{N-2} \mathcal{L}_{-N} B_n^{(h)}(x_1, \cdots, x_n) \tag{4.16}$$

と表せる．

4.2 マルチンゲールと最高ウェイト表現の退化性

$\gamma = \gamma[0,\infty]$ として $\gamma(0)=0, \gamma(\infty)=\infty$ である SLE_κ 曲線を考えることにする．$n \in \{1,2,3,\cdots\}$, $0 < x_1 < \cdots < x_n$ を固定して

$$E = E_{\varepsilon_1}(x_1) \cap \cdots \cap E_{\varepsilon_n}(x_n)$$

とする．ある時刻 $0 < t < \infty$ を選び，$\gamma[0,t]$ が与えられているという条件の下での確率 $\mathbf{P}(E|\gamma[0,t])$ を考えることにする．いま g_t を γ で生成される共形変換として，

$$\overline{g}_t(z) = g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t \tag{4.17}$$

とする．つまり

$$d\overline{g}_t(z) = -\sqrt{\kappa}dB_t + \frac{2}{\overline{g}_t(z)}dt \tag{4.18}$$

$$d\overline{g}'_t(z) = -\frac{2\overline{g}'_t(z)}{(\overline{g}_t(z))^2}dt \tag{4.19}$$

である．定義より，$\overline{g}_t(\gamma) = \overline{g}_t(\gamma[0,\infty])$ は，原点 0 を出発して ∞ にいたる曲線となるが，これは再び SEL_κ 曲線である．((2.44) で表したマルコフ性である.) この SLE_κ のマルコフ性より

$$\mathbf{P}(E\,|\,\gamma[0,t]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{\gamma \cap \overline{g}_t([x_j, x_j + \mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]) \neq \emptyset\right\}\right) \tag{4.20}$$

ただしここで，$E_{\varepsilon_j}(x_j)$ を定義するのに用いたスリット $[x_j, x_j + \mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]$ は, $\overline{g}_t$ によって $\overline{g}_t([x_j, x_j + \mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}])$ という (一般的には) 曲がったスリットに写されることに注意せよ．ε_j が小さいときには，この曲がったスリットは

$$\overline{g}_t([x_j, x_j + \mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]) \simeq [\overline{g}_t(x_j), \overline{g}_t(x_j) + \mathrm{i}\,\varepsilon_j \overline{g}'_t(x_j)\sqrt{2}]$$

というように近似できるであろう．

ここで，いま考えている SLE_κ 曲線が共形制限性をもっているものと仮定することにする．すると 4.1 節で見たように

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon_1\to 0,\cdots,\varepsilon_n\to 0} \varepsilon_1^{-2}\cdots\varepsilon_n^{-2}\mathbf{P}(E\,|\,\gamma[0,t]) \\
= \;& \lim_{\varepsilon_1\to 0,\cdots,\varepsilon_n\to 0} \varepsilon_1^{-2}\cdots\varepsilon_n^{-2}\mathbf{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{n}\Big\{\gamma \cap \overline{g}_t([x_j, x_j + \mathrm{i}\,\varepsilon_j\sqrt{2}]) \neq \emptyset\Big\}\Big) \\
= \;& \lim_{\varepsilon_1\to 0,\cdots,\varepsilon_n\to 0} \varepsilon_1^{-2}\cdots\varepsilon_n^{-2} f(\overline{g}_t(x_1), \overline{g}'_t(x_1)\varepsilon_1; \cdots; \overline{g}_t(x_n), \overline{g}'_t(x_n)\varepsilon_n) \\
= \;& (\overline{g}'_t(x_1))^2 \cdots (\overline{g}'_t(x_n))^2 B_n^{(h)}(\overline{g}_t(x_1), \cdots, \overline{g}_t(x_n))
\end{aligned} \tag{4.21}$$

という極限が存在することになる．$\mathbf{E}[\mathbf{P}(E\,|\,\gamma[0,t])|\mathcal{F}_s]=\mathbf{P}(E\,|\,\gamma[0,s])$, $0\le^{\forall} s<t$ なので，この極限もマルチンゲールである．伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
& d\Big\{(\overline{g}'_t(x_1))^2\cdots(\overline{g}'_t(x_n))^2 B_n^{(h)}(\overline{g}_t(x_1),\cdots,\overline{g}_t(x_n))\Big\} \\
= \quad & \Big\{(\overline{g}'_t(x_1))^2\cdots(\overline{g}'_t(x_n))^2\Big\}\times\sum_{j=1}^n \frac{2}{\overline{g}'_t(x_j)}d\overline{g}'_t\times B_n^{(h)}(\overline{g}_t(x_1),\cdots,\overline{g}_t(x_n)) \\
& +\Big\{(\overline{g}'_t(x_1))^2\cdots(\overline{g}'_t(x_n))^2\Big\}\times\sum_{j=1}^n\Bigg\{\left(-\sqrt{\kappa}dB_t+\frac{2}{g_t(x_j)}dt\right)\frac{\partial}{\partial y_j}\,B_n^{(h)}(y_1,\cdots,y_n)\Big|_{y_j=\overline{g}_t(x_j),1\le j\le n} \\
& \qquad\qquad +\frac{\kappa}{2}dt\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\,B_n^{(h)}(y_1,\cdots,y_n)\Big|_{y_j=\overline{g}_t(x_j),1\le j\le n}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

となる．ただしここで，(4.18) を用いた．(4.19) も用いると，上の SDE のドリフト項は

$$
\sum_{j=1}^n\left\{-\frac{4}{y_j^2}+\frac{2}{y_j}\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{\kappa}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right\}B_n^{(h)}(y_1,\cdots,y_n)\Big|_{y_j=\overline{g}_t(x_j),1\le j\le n} \tag{4.22}
$$

に比例することが導かれる．

局所マルチンゲール性より，このドリフト項は零であるが，(4.14) で導入した微分演算子を用いると，この条件は

$$
\frac{\kappa}{2}\mathcal{L}_{-1}^2 B_n^{(h)}-2\mathcal{L}_{-2}B_n^{(h)}=0 \tag{4.23}
$$

と書ける．

いま，$\{\mathcal{L}_N B_n^{(h)}\}_{N\in\mathbb{Z}}$ に対応して，ベクトル $\{\ell_N B\}_{N\in\mathbb{Z}}$ を考えて，これが Witt 代数を表現しているものとする；

$$
[\ell_N,\ell_M]=(N-M)\ell_{N+M}. \tag{4.24}
$$

すると，上のマルチンゲール性 (4.23) は，2 つのベクトル $\ell_{-1}^2 B$ と $\ell_{-2}B$ が独立ではないことを意味する．つまり，この表現は退化表現であることになる．

$\left(\frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2-2\ell_{-2}\right)B=0$ より，

$$
\ell_2\left(\frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2-2\ell_{-2}\right)B=0 \quad \text{かつ} \quad \ell_1\left(\frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2-2\ell_{-2}\right)B=0
$$

であるが，交換関係 (4.24) より

$$
\begin{aligned}
\ell_2\left(\frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2-2\ell_{-2}\right)B &= \left\{\frac{\kappa}{2}(\ell_{-1}^2\ell_2+6\ell_{-1}\ell_1+6\ell_0)-2(\ell_{-2}\ell_2+4\ell_0)\right\}B \\
\ell_1\left(\frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2-2\ell_{-2}\right)B &= \left\{\frac{\kappa}{2}(\ell_{-1}^2\ell_1+4\ell_{-1}\ell_0+2\ell_{-1})-2(\ell_{-2}\ell_1+3\ell_{-1})\right\}B
\end{aligned}
$$

である．これに，最高ウェイト h をもつ最高ウェイト表現の条件

$$\begin{aligned}&\ell_N B = 0, \quad N = 1, 2, 3, \cdots, \\ &\ell_0 B = hB \end{aligned} \tag{4.25}$$

を課すと，

$$\begin{aligned}\ell_2\left(\frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2 - 2\ell_{-2}\right)B &= (3\kappa - 8)hB \\ \ell_1\left(\frac{\kappa}{2}\ell_{-1}^2 - 2\ell_{-2}\right)B &= (2\kappa h + \kappa - 6)\ell_{-1}B \end{aligned} \tag{4.26}$$

となるので，これらが零となることから

$$\kappa = \frac{8}{3}, \quad h = \frac{6-\kappa}{2\kappa} = \frac{5}{8} \tag{4.27}$$

と定められることになる．この結果は, 定理 3.2 を再現するものである．つまり

$$\mathrm{SLE}_{8/3}\ \text{が共形制限性をもつ} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Witt 代数のレベル 2 の退化表現} \tag{4.28}$$

という対応が見られたことになる．

注 4.2. 中心元 c を導入することによって，Witt 代数はビラソロ代数

$$[\widetilde{\ell}_N, \widetilde{\ell}_M] = (N-M)\widetilde{\ell}_{N+M} + \frac{c}{12}N(N^2-1)\delta_{N+M,0} \tag{4.29}$$

に拡大される．これに対応して，共形制限性をもつランダム曲線 γ (およびその確率法則 $\mathbf{P}_{D;A,B}$) も複素 BM ($h=1$) や $\mathrm{SLE}_{8/3}$ ($h=5/8$) 以外のものに拡張したい．定理 3.2 と上で見たように，SLE_κ は $\kappa = 8/3$ のときにのみ共形制限性をもち，このときは $c=0$ であった．よって SLE_κ を拡張しなければならない．

制限指数 h (これが共形次元，最高ウェイトである) と κ との関係は

$$h = \frac{6-\kappa}{2\kappa}$$

であり，h は $\kappa > 0$ の単調減少関数である．また，定理 3.1 より

$$\mathbf{P}(\gamma \subset H) = (\Phi'_H(0))^h$$

であるが，$\Phi'_H(0) < 1$ であるから，$\mathbf{P}(\gamma \subset H)$ は h の単調減少関数ということである．よって曲線 γ は，h が大きくなるにつれて，H に収まりにくくなる（$\mathbb{H} \setminus H$ にぶつかりやすくなる)．つまり

$\kappa < 8/3, h > 5/8$ の場合には，$\mathrm{SLE}_{8/3}$ に何か別の曲線群を付け加えて「うまく太らせて」やれば，望ましい共形制限性をもつ確率法則が得られる可能性がある．

$0 < \kappa < 8/3$ のときは

$$\lambda(\kappa) = -c(\kappa) = \frac{(6-\kappa)(8-3\kappa)}{2\kappa} > 0$$

となる．Werner らは，この λ の密度をもつ Brownian loops の Poisson cloud を SLE_κ に加えてやる方法を考案している．この方法は，共形場理論で議論されるストレス・テンソル (streee-energy tensor) に対する新しい確率論的な解釈を与えるものである．詳しくは，文献 [3, 12] などを参照せよ．

A　2節に関する補足説明

A.1　リーマンの写像定理について

$\hat{\mathbb{C}}$ をリーマン球とする．領域 D (開集合とする) に対して，その $\hat{\mathbb{C}}$ における補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の連結部分集合をなしているとき, D は単連結領域 (simply commected domain) であるという．$\mathbb{C}$ 上の原点を中心とする単位円を $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と記す.

定理 A.1 (Riemann mapping theorem) D が $\mathbb{C}$ 全体ではない単連結領域であるとする．この D 内の 1 点 $\omega \in D$ を選ぶ．このとき，D を単位円 $\mathbb{D}$ に写す共形変換で

$$f(w) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(w) > 0 \tag{A.1}$$

であるものが存在し，それは一意的に定まる．

証明は [1, 5] などを参照せよ．

上半平面 $\mathbb{H}$ の有界部分集合 A において，$A = \mathbb{H} \cap \overline{A}$ であり，かつ $\mathbb{H} \setminus A$ が単連結であるとき，A を compact $\mathbb{H}$-hull という．compact $\mathbb{H}$-hull 全体の集合を $\mathcal{Q}$ と書くことにする．$A \in \mathcal{Q}$ 自体は連結である必要はない．

$A \in \mathcal{Q}$ が与えられているものとする．$\mathbb{H} \setminus A$ は $\mathbb{C}$ 全体ではない単連結領域なので，リーマンの写像定理 (定理 A.1) より

$$f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{D}$$

という共形変換が存在することが保証されている．また，Möbius 変換

$$f^{(2)}(z) = \frac{\overline{\alpha} z - \alpha\beta}{z - \beta}, \quad |\beta| = 1, \alpha \in \mathbb{H} \tag{A.2}$$

は

$$f^{(2)} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$$

の共形変換である（$f^{(2)}(0) = \alpha$ である)．この 2 つを合成した $f_A^{(3)} = f^{(2)} \circ f^{(1)}$ は

$$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{H}$$

なる共形変換である．

$\mathbb{H} \setminus A$ の境界は，A の境界と実軸から成る．$f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{D}$ によって，この境界は単位円周上 $\{z \in C : |z| = 1\}$ に写されることになる．また，$f^{(2)} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ によって，単位円周は $\mathbb{H}$ の境界，すなわち実軸（および無限遠点 ∞) に写ることになる．このことから，$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{H}$ によって，実軸上の点は実軸上の点に写されることになる．(また A の境界も実軸上に写される．)

また，無限遠点 ∞ は，(A.2) で与えられる $f_A^{(1)}$ により単位円周上のいずれかの点に写されるが，$f^{(2)}$ では特に $z = \beta$ という単位円周上の点が ∞ に写される．よって $f^{(2)}$ のパラメータ β を調節することにより，

$$\lim_{z \to \infty} [f_A^{(3)}(z) - z] = 0$$

となるように $f_A^{(3)}$ を選ぶことができる．(これを流体力学的条件 (hydrodynamic condition) と呼ぶ．)

以上では $f_A^{(3)}$ は $\mathbb{H}\setminus A$ 上で定義された関数であるが，これは実軸上 $z\in\mathbb{R}$ では実関数であるので，シュバルツの鏡像原理によって下半平面に解析接続することができる．$1/f_A^{(3)}(1/z)$ を考えると，これは原点 0 を原点 0 に写す analytic 関数であるから，原点 0 の周りで次のようにテイラー展開できる．

$$\frac{1}{f_A^{(3)}(1/z)} = a_1z + a_2z^2 + z_3z^3 + \cdots, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

これより

$$f_A^{(3)}(z) = b_1z + b_0 + b_{-1}z^{-1} + b_{-2}z^{-2} + \cdots, \quad b_j \in \mathbb{R}$$

という展開が得られる．ここで，$z\in\mathbb{R}$ のときに $f_A^{(3)}(z)$ も実数であることから，係数 $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ である．

次に，$\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ の Möbius 変換で ∞ を ∞ に写すものを考えることにする。これは

$$f^{(4)}(z) = d_1z + d_0, \quad d_1 > 0, d_0 \in R$$

で与えられる．これと $f_A^{(3)}$ との合成を考えると

$$\begin{aligned}[f^{(4)}\circ f_A^{(3)}](z) &= f^{(4)}(f_A^{(3)}(z)) \\ &= d_1b_1z + (d_1b_0 + d_0) + d_1b_{-1}z^{-1} + d_1b_{-2}z^{-2} + \cdots\end{aligned}$$

となるが，特に

$$d_1b_1 = 1, d_1b_0 + d_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = \frac{1}{b_1}, d_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

と係数 d_0, d_1 を選ぶことにする．こうして定められた共形変換を

$$g_A : \mathbb{H}\setminus A \to \mathbb{H} \tag{A.3}$$

と書くことにすると，これは流体力学的条件

$$\lim_{z\to\infty}[g_A(z) - z] = 0 \tag{A.4}$$

を満たし，

$$g_A(z) = z + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \cdots, \quad c_j \in \mathbb{R} \tag{A.5}$$

と展開されることになる．

A.2 ポアソン核の計算について

領域 D に対して，この内点からスタートさせた複素 BM に対して

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 : \mathcal{B}_t \notin D\} \tag{A.6}$$

とする．これは複素 BM が領域 D の境界 ∂D にはじめて到達した時刻である．次の命題が知られている．

命題 A.2 D が正則な境界をもつ領域であり，その境界に対して有界で連続な関数 $F : \partial D \to \mathbb{R}$ が与えられているものとする．このとき，D の中では調和的であり，∂D 上では F に一致するような $\overline{D}(= D\cup\partial D) \to \mathbb{R}$ の関数 u が一意的に定まり，これは D 内の各点 $z\in\mathbb{D}$ において

$$u(z) = \mathbf{E}^z[F(\mathcal{B}_{\tau_D})] \tag{A.7}$$

で与えられる．

以下では，領域 D の境界 ∂D がいくつかの条件を満たしているものとして話を進めることにする．

$z \in D$ に対して，∂D に対する確率測度 $\mathrm{hm}(z, D; \cdot)$ を

$$\mathrm{hm}(z, D; V) = \mathbf{P}^z[\mathcal{B}_{\tau_D} \in V], \quad V \subset \partial D \tag{A.8}$$

で定義する．これは調和測度 (harmonic measure (in D from z)) とよばれる．これを用いると，(A.7) は

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w) \mathrm{hm}(z, D; dw) \tag{A.9}$$

と書き直せる．さらにこれが，境界 ∂D に沿った線積分によって

$$u(z) = \int_{\partial D} F(w) H_D(z, w) |dw| \tag{A.10}$$

と書けるとき，積分核 $H_D(z, w)$ をポアソン核 (Poisson kernel) という．このポアソン核は次の性質を持つ．

- 各 $w \in \partial D$ に対して，$H_D(z, w)$ は z に関して D 内で調和関数である．
- 境界の任意の点 $w_0 \in \partial D$ に対して，$z \in D$ を $w_0 \in \partial D$ に近づけていくと，$H_D(z, w)$ はデルタ関数 $\delta(w - w_0)$ になる:
$$\lim_{z \to w_0} H_D(z, w) = \delta(w - w_0), \quad w_0, w \in \partial D.$$

(複素)BM は共形変換不変性を持つ．このことより，調和測度に対して次のことが成り立つ．

命題 A.3 $f : D \to D'$ が共形変換であるとする．これは $\overline{D} = D \cup \partial D$ で連続であり，1 対 1 である．$z \in D, V \subset \partial D$ であるとき，

$$\mathrm{hm}(f(z), D'; f(V)) = \mathrm{hm}(z, D; V) \tag{A.11}$$

が成り立つ．

このことより，ポアソン核の定義 (A.10) から直ちに，次が導かれる．

$$H_{D'}(f(z), f(w)) = |f'(w)|^{-1} H_D(z, w), \quad z \in D, w \in \partial D. \tag{A.12}$$

まず，半無限帯領域 (half-infinite strip)

$$D = \{z = x + \mathrm{i}\, y : x > 0, 0 < y < \pi\} \tag{A.13}$$

を考える．この境界として $\partial D = \{\mathrm{i}\, q : q \in (0, \pi)\}$ を考えることにする．このときの $H_D(z, \mathrm{i}\, q), z \in D, q \in (0, \pi)$ を求めたい．

まず，各 $q \in (0, \pi)$ に対して，$H_D(z, \mathrm{i}\, q)$ は z に関して調和関数であるので，ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_D(x + \mathrm{i}\, y, \mathrm{i}\, q) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_D(x + \mathrm{i}\, y, \mathrm{i}\, q) = 0, \quad x + \mathrm{i}\, y \in D$$

を解く必要がある．これは変数分離法 (separation of variables) で解くことができる．(q は固定して)

$$H_D(x + \mathrm{i}\, y, \mathrm{i}\, q) = X(x) Y(y)$$

と置くと，$c=$ 定数として，

$$\begin{aligned} & X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0 \\ \iff \quad & \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=c \end{aligned}$$

つまり，

$$X''(x)=cX(x), \tag{A.14}$$

$$Y''(y)=-cY(y) \tag{A.15}$$

という二つの常微分方程式に分離できる．(A.15) の一般解は

$$Y(y)=a\sin(\sqrt{c}y)+b\cos(\sqrt{c}y)$$

の形であるが，$y=0,\pi$ では $Y(y)=0$ であることから，

$$b=0, \quad \sqrt{c}=n,\, n=1,2,3,\cdots$$

と定まる．つまり

$$Y(y)=a\sin(ny), \quad n=1,2,3,\cdots$$

である．したがって (A.14) は

$$X''(x)=n^2X'(x)$$

となるが，この解のうち $x\to\infty$ で発散しないものを選ぶ必要があるので，

$$X(x)=\mathrm{const.}\times e^{-nx}$$

の形に定まる．以上より

$$H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(q)e^{-nx}\sin(ny)$$

となる．ここで $a_n(q)$ は q の関数であり，これは

$$\lim_{x\to 0}H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q)=\delta(y-q) \tag{A.16}$$

という条件より

$$a_n(q)=\frac{2}{\pi}\sin(nq)$$

と定まる．実際こうすると

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}H_D(x+\mathrm{i}\,y,\mathrm{i}\,q) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nq)\sin(ny) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\,n(q+y)}+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\,n(q-y)} \end{aligned}$$

となるが，デルタ関数に対する

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\,nx}$$

というフーリエ級数表示と，$q, y > 0$ という条件より，(A.16) の成立が確かめられる．つまり

$$H_D(x+\mathrm{i}\,y, \mathrm{i}\,q) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\sin(ny)\sin(nq), \quad x+\mathrm{i}\,y \in D,\, q \in (0,\pi) \tag{A.17}$$

という結果が得られた．

ここで，$r \in R, R > 0$ として，次の変換を考えることにする．

$$z = x+\mathrm{i}\,y \mapsto \zeta = \alpha+\mathrm{i}\,\beta : \zeta = f(z) = r + Re^{z}. \tag{A.18}$$

この変換は，半無限帯領域 D を

$$\begin{aligned} D' &= \{\zeta = \alpha + \mathrm{i}\,\beta : |\zeta - r| > R, \beta > 0\} \\ &= \mathbb{H} \setminus \mathcal{B}(r, R) \end{aligned} \tag{A.19}$$

に写す共形変換である．境界は

$$\begin{aligned} \{x : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha > r + R\} \\ \{x + \mathrm{i}\,\pi : x > 0\} &\mapsto \{\alpha : \alpha < r - R\} \\ \{\mathrm{i}\,q : q \in (0,\pi)\} &\mapsto \{r + Re^{\mathrm{i}\,q}; q \in (0,\pi)\} \end{aligned}$$

と変換される．

変換 (A.18) より

$$e^{x+\mathrm{i}\,y} = \frac{\zeta - r}{R}, \quad e^{x} = \frac{|\zeta - r|}{R}, \quad e^{\mathrm{i}\,y} = \frac{\zeta - r}{|\zeta - r|}$$

なので，

$$e^{-x}e^{\mathrm{i}\,y} = \frac{R}{\overline{\zeta} - r}$$

という関係式が得られる．この両辺を n 乗すると

$$e^{-nx}e^{\mathrm{i}\,ny} = \left(\frac{R}{\overline{\zeta} - r}\right)^{n}$$

となるが，この両辺の虚部をとると

$$\begin{aligned} e^{-nx}\sin(ny) &= \mathrm{Im}\left[\left(\frac{R}{\overline{\zeta} - r}\right)^{n}\right] \\ &= -R^{n}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(\zeta - r)^{n}}\right] \end{aligned}$$

が得られる．また，$q \in (0,\pi)$ に対して，

$$f(\mathrm{i}\,q) = r + Re^{\mathrm{i}\,q}, \quad \mathrm{i}\,q \in \partial D$$

なので，$f'(\mathrm{i}\,q) = Re^{\mathrm{i}\,q}$ であり，したがって

$$|f'(\mathrm{i}\,q)| = R$$

である．以上を (A.12) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
H_{D'}(\zeta, r+Re^{\mathrm{i}\,q}) &= \frac{1}{R}\times\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-R^n\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(\zeta-r)^n}\right]\right\}\sin(nq) \\
&= -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nq)R^{n-1}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{(\zeta-r)^n}\right]
\end{aligned}
\tag{A.20}
$$

という結果が得られる．

A.3 半平面 capacity について

流体力学的条件 (A.4) より $z-g_A(z)$ は有界な analytic 関数であるから，その実部と虚部はそれぞれ調和関数である．ここでは虚部

$$
\phi_A(z)=\mathrm{Im}\,(z-g_A(z)) \tag{A.21}
$$

を考えることにする．これは $\mathbb{H}\setminus A$ 上の有界な調和関数である．

そこで，上の A.2 節で述べた 命題 A.2 を適用することを考える．いま

$$
\tau=\tau_{\mathbb{H}\setminus A}=\inf\{t:\mathcal{B}_t\in\mathbb{R}\cup A\} \tag{A.22}
$$

とする．これは (複素)BM が実軸上 $\mathbb{R}$ あるいは compact $\mathbb{H}$-hull A のいずれかにはじめて到達する時刻である．$\phi_A(z)$ は調和関数なので

$$
\phi_A(z)=\mathbf{E}^z[\phi_A(\mathcal{B}_\tau)] \tag{A.23}
$$

と書くことができることになる．(A.21) を代入すると

$$
\phi_A(z)=\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)]-\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(g_A(\mathcal{B}_\tau))]=\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)]
$$

となる．ただしここで，$\mathcal{B}_\tau$ は $\mathbb{H}\setminus A$ の境界上の点であり，これは g_A で実軸上に写されるので，その虚部 $\mathrm{Im}\,(g_A(\mathcal{B}_\tau))=0$ であることを用いた．したがって

$$
\mathrm{Im}\,(g_A(z))=\mathrm{Im}\,(z)-\mathbf{E}^z[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)] \tag{A.24}
$$

という表式が得られたことになる．

この等式で特に $z=\mathrm{i}\,y, y>0$ とおくと，$\mathrm{Im}\,(\mathrm{i}\,y)=y$ なので

$$
\mathrm{Im}\,(g_A(\mathrm{i}\,y))=y-\mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)]
$$

となる．ここで (A.5) の展開を用いると

$$
(\mathrm{LHS})=\mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\,y+\frac{c_{-1}}{\mathrm{i}\,y}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)=y-\frac{c_{-1}}{y}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)
$$

なので

$$
y-\frac{c_{-1}}{y}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right)=y-\mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)].
$$

したがって

$$c_{-1} = \lim_{y\to\infty} y\mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_\tau)]$$

である．この量を $A \in \mathcal{Q}$ に対する半平面 capacity (half-plane capacity) とよび，$\mathrm{hcap}(A)$ と表す；

$$\mathrm{hcap}(A) \equiv \lim_{y\to\infty} y\mathbf{E}^{\mathrm{i}\,y}[\mathrm{Im}\,(\mathcal{B}_{\tau_{\mathbb{H}\setminus A}})], \quad A \in \mathcal{Q}. \tag{A.25}$$

この定義より，$A \in \mathcal{Q}$ に対して

$$g_A(z) = z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \to \infty \tag{A.26}$$

となる．

半平面 capacity に関して，2 つの補題を証明しておくことにする．以下では，$\mathbb{C}$ 上の集合 (領域) $S = \{z : z \in S\}$ に対して，これを $y \in \mathbb{C}$ だけ平行移動したものを

$$S + y = \{z + y : z \in S\}$$

と書くことにする．また，S を原点を中心にして $r > 0$ 倍して得られる集合 (領域) を rS と書くことにする．

補題 A.4 $r > 0, x \in \mathbb{R}$ とすると，$A \in \mathcal{Q}$ に対して次が成り立つ．

$$\mathrm{hcap}(rA) = r^2\mathrm{hcap}(A), \tag{A.27}$$

$$\mathrm{hcap}(A + x) = \mathrm{hcap}(A). \tag{A.28}$$

<u>証明.</u> 共形変換 g_A の定義より，

$$g_{rA}(z) = rg_A(z/r), \tag{A.29}$$

$$g_{A+x}(z) = g_A(z - x) + x \tag{A.30}$$

が成り立つことは明らかである．展開 (A.26) を用いると

$$\text{(A.29) の左辺} = z + \frac{\mathrm{hcap}(rA)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり，

$$\begin{aligned}\text{(A.29) の右辺} &= r\left\{\frac{z}{r} + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z/r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z/r|^2}\right)\right\} \\ &= z + \frac{r^2\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\end{aligned}$$

なので，両辺の $1/z$ の係数を比較すると (A.27) が得られる．同様に

$$\text{(A.30) の左辺} = z + \frac{\mathrm{hcap}(A+z)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

であり，また

$$\begin{aligned}\text{(A.30) の右辺} &= (z-x) + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z-x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z-x|^2}\right) + x \\ &= z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\end{aligned}$$

なので，(A.28) が得られる．∎

いま $A, B \in \mathcal{Q}$ であり

$$A \subset B$$

とする．共形変換 g_A によって $\mathbb{H} \setminus A \to \mathbb{H}$ となるが，$A \subset B$ なので $g_A(B \setminus A) \in \mathcal{Q}$ である．このとき

$$\mathbb{H} \setminus g_A(B \setminus A) \to \mathbb{H}$$

とする共形変換が $g_{g_A(B\setminus A)}$ というわけである．以上より

$$g_B = g_{g_A(B\setminus A)} \circ g_A, \quad A \subset B \in \mathcal{Q} \tag{A.31}$$

という関係が成り立つことになる．このとき，次が成り立つ．

補題 A.5 $A, B \in \mathcal{Q}, A \subset B$ とする．このとき

$$\mathrm{hcap}(B) = \mathrm{hcap}(A) + \mathrm{hcap}(g_A(B \setminus A)) \tag{A.32}$$

が成り立つ．

<u>証明.</u> 展開 (A.26) より

$$\begin{aligned} g_A(z) &= z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \\ g_{g_A(B\setminus A)}(z) &= z + \frac{\mathrm{hcap}(g_A(B\setminus A))}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \qquad z \to \infty. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &\Big[g_{g_A(B\setminus A)} \circ g_A\Big](z) = g_{g_A(B\setminus A)}\Big(g_A(z)\Big) \\ &= g_{g_A(B\setminus A)}\left(z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \\ &= \left\{z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right\} + \frac{\mathrm{hcap}(g_A(B\setminus A))}{z + \frac{\mathrm{hcap}(A)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \\ &= z + \frac{1}{z}\Big(\mathrm{hcap}(A) + \mathrm{hcap}(g_A(B\setminus A))\Big) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right) \end{aligned}$$

となるが，(A.32) よりこれが

$$g_B(z) = z + \frac{\mathrm{hcap}(B)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right),$$

と等しくなければならない．これより (A.32) が導かれる．∎

B　$h'_t(U_t)$ の満たす SDE の導出

B.1　$h_t(z)$ と $h'_t(z)$ の微分方程式

γ を $0 < \kappa \leq 4$ のときの SLE_κ 曲線とする．いま $H \subset \mathbb{H}, 0, \infty \in \partial H$ に対して，$\gamma \subset H$ とする．

$$\Phi_H : H \to \mathbb{H} \quad \text{共形変換}, \quad \Phi_H(0) = 0, \quad \Phi_H(z) \sim z \quad (z \to \infty)$$

である．この共形変換で，時刻 t までの SLE_κ 曲線 $\gamma[0,t]$ と領域 H はそれぞれ，$\Phi_H(\gamma[0,t])$ と $\Phi_H(H) = \mathbb{H}$ に写される．共形制限性より，$\Phi_H(\gamma[0,t])$ も SLE_κ 曲線である．これを $\mathbb{H}$ から「消去」する SLE_κ を g_t^* と書くことにする：

$$g_t^* : \mathbb{H} \setminus \Phi_H(\gamma[0,t]) \to \mathbb{H} \quad \text{共形変換}.$$

この g_t^* の満たす方程式は

$$\frac{d}{dt} g_t^*(z) = \frac{2(\Phi'_H(U_t))^2}{g_t^*(z) - U_t^*}, \quad U_t^* \equiv \Phi_H(U_t) \tag{B.1}$$

である．ただしここで，右辺の分子は，通常の SLE_κ の $g_t(z)$ に対する方程式と比べて

$$2 \quad \to \quad 2(\Phi'_H(U_t))^2$$

と変形されていることに注意せよ．(付録 A.3 の 補題 A.4 で $\mathrm{hcap}(rA) = r^2 \mathrm{hcap}(A)$ を導いたのと同様の考察を行えばよい．)

　元の SLE_κ g_t の逆変換を

$$f_t = g_t^{-1}$$

と書くことにすると，これも共形変換である．定義より $f_t(g_t(z)) = z$ である．この自明な式の両辺を t で微分すると (z と t は独立なので右辺は零になり)

$$\frac{d}{dt} f_t(g_t(z)) + f'_t(g_t(z)) \frac{d}{dt} g_t(z) = 0$$

が得られる。ここで，SLE_κ の方程式

$$\frac{d}{dt} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}$$

を代入すると，

$$\frac{d}{dt} f_t(g_t(z)) + f'_t(g_t(z)) \frac{2}{g_t(z) - U_t} = 0$$

となるので，$g_t(z)$ を改めて z と書くことにすると

$$\frac{d}{dt} f_t(z) = -f'_t(z) \frac{2}{z - U_t}, \quad f_0(z) = z \tag{B.2}$$

という，g_t の逆変換に対する方程式が導かれる．

　さて，定義

$$h_t = \Phi_{g_t(H)} \tag{B.3}$$

より，次の等式が成り立つことが分かる：

$$h_t = g_t^* \circ \Phi_H \circ f_t, \quad h_0 = \Phi_H. \tag{B.4}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h_t(z) &= \frac{d}{dt}g_t^*(\Phi_H(f_t(z)))\\ &= \dot{g}_t^*(\Phi_H(f_t(z))) + (g_t^*)'(\Phi_H(f_t(z))) \times \Phi_H'(f_t(z))\dot{f}_t(z)\end{aligned}$$

となる．($g_t^*(z)$ に対して, 時間微分はドットをつけて表し; $\dot{g}_t^*(z) = \frac{d}{dt}g_t^*(z)$, 変数 z に対する微分は $(g_t^*)'(z) = \frac{d}{dz}g_t^*(z)$ とプライムをつけて表すことにする.) ここで (B.1) と (B.2) を代入すると

$$\frac{d}{dt}h_t(z) = \frac{2(\Phi_H'(U_t))^2}{g_t^*(\Phi_H(f_t(z))) - U_t^*} + (g_t^*)'(\Phi_H(f_t(z))) \times \Phi_H'(f_t(z))\left[-f_t'(z)\frac{2}{z-U_t}\right]$$

を得る．h_t の微分方程式も時間 t について斉次なので，$t=0$ として考察しても構わない．$t=0$ とすると，$f_0(z)=z, f_0'(z)=1, g_0^*(z)=z, (g_0^*)'(z)=1$ なので，上式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}h_0(z) &= \frac{2(\Phi_H'(U_0))^2}{\Phi_H(z)-\Phi_H(U_0)} - \frac{2\Phi_H'(z)}{z-U_0}\\ &= \frac{2(h_0'(U_0))^2}{h_0(z)-h_0(U_0)} - \frac{2h_0'(z)}{z-U_0}\end{aligned}$$

となる．したがって一般の $t \geq 0$ に対しては

$$\frac{d}{dt}h_t(z) = \frac{2(h_t'(U_t))^2}{h_t(z)-h_t(U_t)} - \frac{2h_t'(z)}{z-U_t} \tag{B.5}$$

が得られる．この方程式の両辺を z で微分すると，

$$\frac{d}{dz}h_t'(z) = -\frac{2(h_t'(U_t))^2 h_t'(z)}{(h_t(z)-h_t(U_t))^2} + \frac{2h_t'(z)}{(z-U_t)^2} - \frac{2h_t''(z)}{z-U_t} \tag{B.6}$$

が得られる．(B.5) と (B.6) で $z \to U_t$ の極限をとると

$$\frac{d}{dt}h_t(U_t) = \lim_{z\to U_t}\frac{d}{dt}h_t(z) = -3h_t''(U_t) \tag{B.7}$$

および

$$\frac{d}{dt}h_t'(U_t) = \lim_{z\to U_t}\frac{d}{dt}h_t'(z) = \frac{(h_t''(U_t))^2}{2h_t'(U_t)} - \frac{4}{3}h_t''(U_t) \tag{B.8}$$

が得られる．

B.2 伊藤の公式の適用

伊藤の公式より

$$\begin{aligned}d(h_t'(U_t))^h &= h(h_t'(U_t))^{h-1}h_t''(U_t)dU_t\\ &\quad + \frac{1}{2}\Big\{h(h-1)(h_t'(U_t))^{h-2}(h_t''(U_t))^2 + h(h_t'(U_t))^{h-1}h_t'''(U_t)\Big\}(dU_t)^2\\ &\quad + h(h_t'(U_t))^{h-1}\frac{d}{dt}h_t'(U_t)dt.\end{aligned}$$

右辺の最後の項に (B.8) を代入する．$dU_t=\sqrt{\kappa}dB_t, (dU_t)^2=\kappa dt$ なので

$$\begin{aligned}
\text{(RHS)} &= h(h_t'(U_t)^h\left[\sqrt{\kappa}\frac{h_t''(U_t)}{h_t'(U_t)}dB_t\right. \\
&\quad \left.+\left\{\frac{1}{2}(h-1)\kappa\frac{(h_t''(U_t))^2}{(h_t'(U_t))^2}+\frac{1}{2}\kappa\frac{h_t'''(U_t)}{h_t'(U_t)}+\frac{1}{h_t'(U_t)}\left(\frac{(h_t''(U_t))^2}{2h_t'(U_t)}-\frac{4}{3}h_t'''(U_t)\right)\right\}dt\right] \\
&= h(h_t'(U_t))^h\left[\sqrt{\kappa}\frac{h_t''(U_t)}{h_t'(U_t)}dB_t+\left\{\frac{(h-1)\kappa+1}{2}\frac{(h_t''(U_t))^2}{(h_t'(U_t))^2}+\left(\frac{\kappa}{2}-\frac{4}{3}\right)\frac{h_t'''(U_t)}{h_t'(U_t)}\right\}dt\right]
\end{aligned}$$

となるので，(3.16) が得られる．

参考文献

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).

[2] M. Bauer and D. Bernard, SLE matringales and the Virasoro algebra, *Phys. Lett.* **B 557** (2003) 309-316.

[3] R. Friedrich and W. Werner, Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 105-122.

[4] W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its application, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 1149-1229.

[5] 香取眞理,「共形変換と Loewner 方程式」中央大学大学院講義ノート (2006 年度後期). http : //www.phys.chuo − u.ac.jp/j/katori/ から pdf file をダウンロード可能.

[6] 香取眞理,「臨界現象・フラクタル研究の新世紀– SLE の発見 –」, 日本物理学会誌, Vol.**62**, No.7 (2007) 527-531.

[7] G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, (American Mathematical Society, 2005).

[8] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, Conformal restriction: the chordal case, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003) 917-955.

[9] G. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Ann. Probab.* **32** (2004) 939-995.

[10] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.

[11] S. Smirnov, Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limit, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001) 239-244.

[12] W. Werner, Conformal restriction and related questions, *Probability Surveys* **2** (2005) 145-190.