

# 第13回 久保記念シンポジウム

2008年10月11日(土)

東京理科大学理窓会館(神楽坂)

テーマ「非標準的方法による物理研究」

「確率微分方程式と相転移・臨界現象」

(Lawler, Schramm, Werner らの研究の紹介)

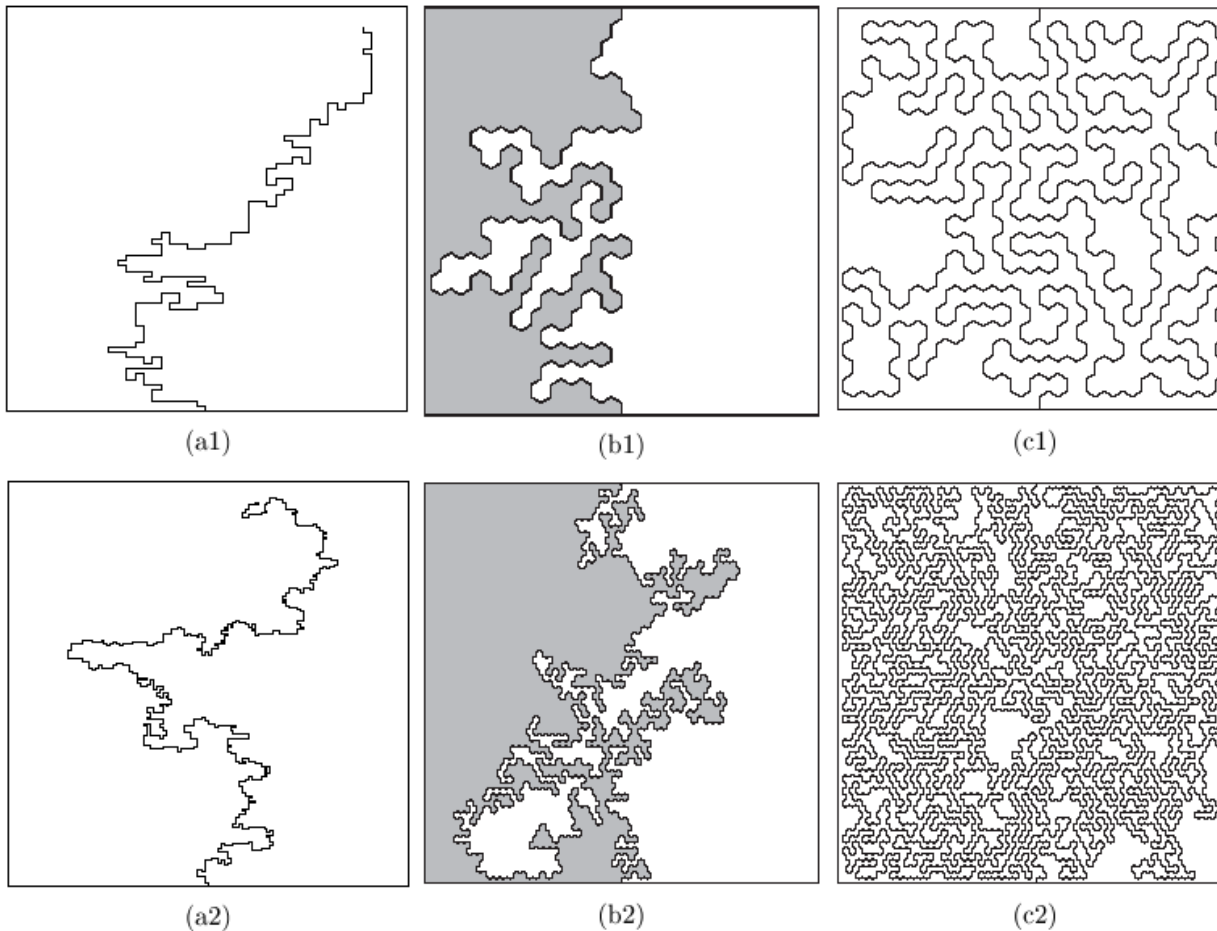
Schramm-Loewner Evolution (SLE)

香取眞理(中央大学理工学部)

# 1.Introduction

## 文献

- G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, American Math. Soc., 2005.
- W. Werner, Conformal restriction and related questions, *Probability Surveys* **2** (2005) 145-190.
- R. Friedrich and W. Werner, Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 105-122.
- 香取眞理, 「臨界現象・フラクタル研究の新世紀 -SLE の発見-」, 日本物理学会誌, **62** (no.7) (2007) 527-531.



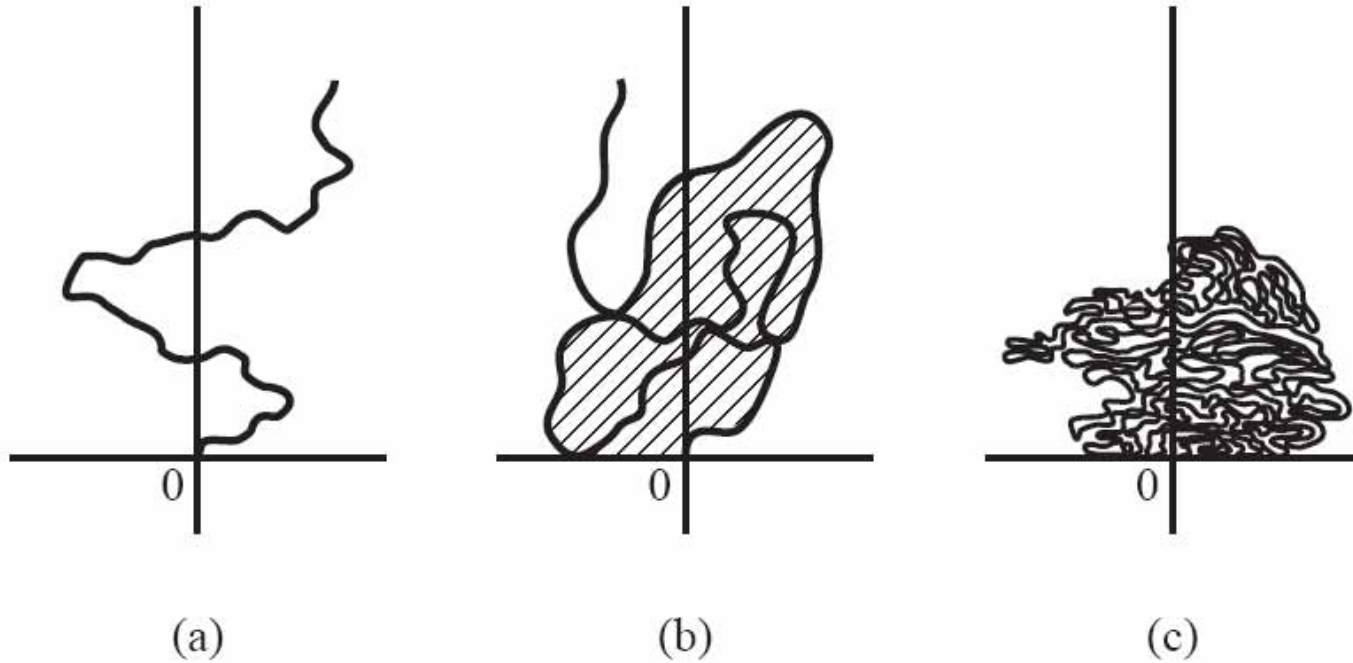
## 計算機シミュレーションで描いた2次元格子上的フラクタル曲線

(a1), (a2) 自己回避ウォーク(SAW)

(b1), (b2) 臨界点におけるサイト・パーコレーション模型の浸透領域の界面

(c1), (c2) Harmonic Anti-Navigator という界面成長模型の時間発展

格子のメッシュのサイズを小さくして行く(ステップ数を増やす)と[図の上段から下段へ...]  
それぞれあるランダムな曲線に収束するであろう。



連続極限で得られるランダムな曲線の**大雑把な分類**

(a) 単純曲線(自分自身と接したり交わったりしない曲線): **例) SAWの極限**

(b) 自分自身と何度も接するが交わることはない. 隙間がたくさんある.

(c) 平面(上半平面)を埋め尽くしていく曲線: **例) uniform spanning trees の極限**

臨界点での**パーコレーション模型の浸透領域界面の連続極限**も

臨界温度での**イジング模型の + 領域と - 領域との界面の連続極限**も

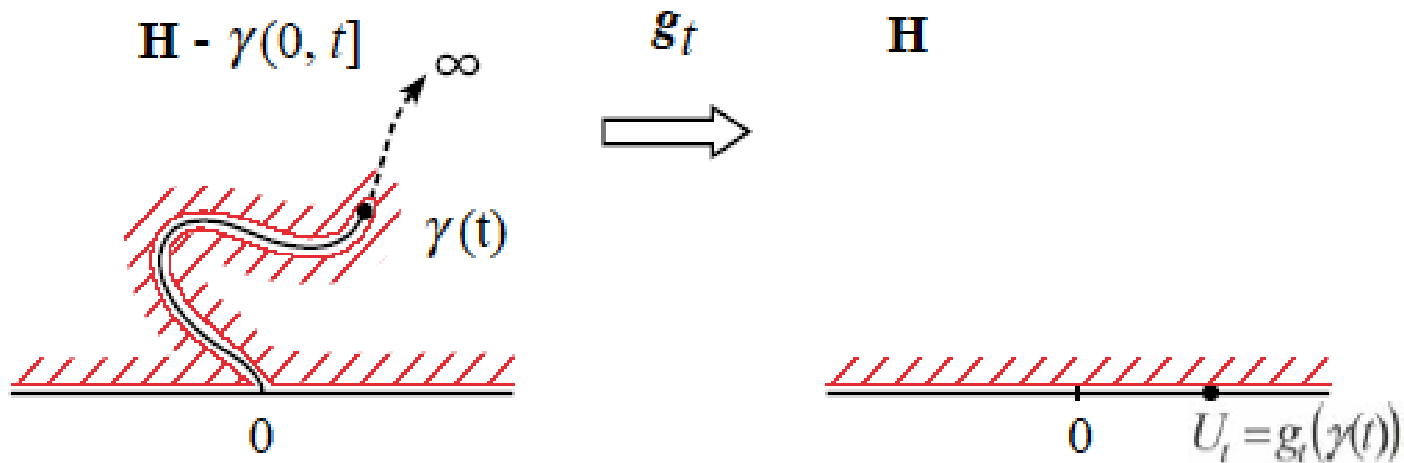
ともに (b) のような曲線であろう. しかし, **両者の統計性は異なるはず**である.

曲線(経路・道)の統計法則の正確な記述が求められる.

## 上半平面内の曲線・共形変換・Loewner の微分方程式

$\mathbf{H} = \{z = x + \sqrt{-1}y : y > 0\}$  upper half plane

$\gamma = \gamma(0, \infty) \in \mathbf{H}$   $\gamma(0) = 0, \gamma(\infty) = \infty$  simple curve



$g_t : \mathbf{H} - \gamma(0, t] \rightarrow \mathbf{H}$

conformal map

## Loewner の理論 (1920年頃)

simple curve  $\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \infty)\} \Leftrightarrow \exists U_t \in \mathbf{R}, t \in [0, \infty)$

$g_t$  is given as a solution of the following equation;

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad t \geq 0$$

$$g_0(z) = z$$

(注) ただし, 時間の進む速さ (曲線のパラメトライズの仕方) は, ある方法で調整することにする.

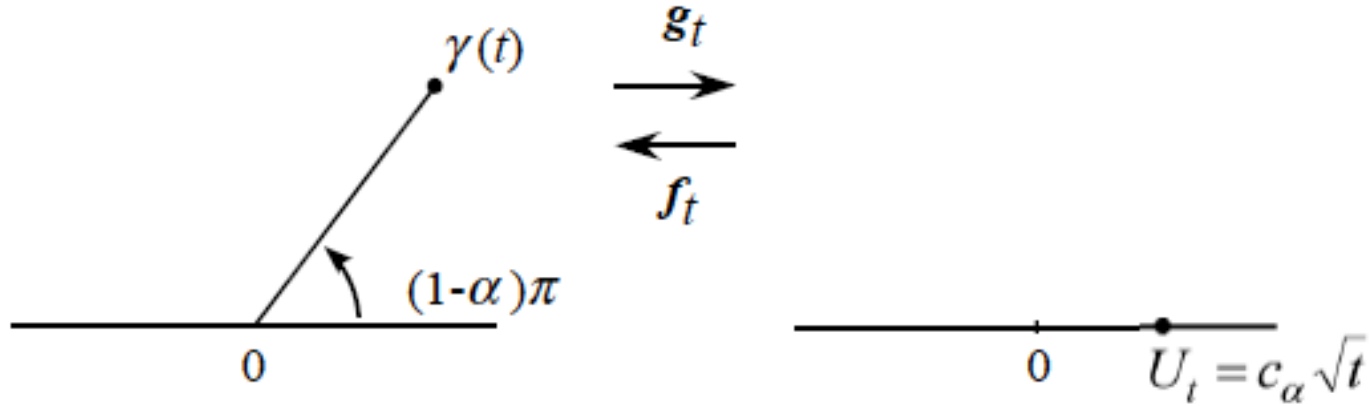
$$( \text{hcap}(\gamma(0, t]) = 2t )$$

(注) 曲線の時刻  $t$  のときの先端  $(t)$  の像

$$U_t = g_t(\gamma(t))$$

は, 実軸 ( $\mathbf{H}$  の境界) 上にあり, これが Loewner 方程式の駆動関数になっている.

例:  $(t)$ が直線の場合 (Schwarz-Christoffel 変換)



$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U_t} \quad \Leftrightarrow \quad f_t(z) \equiv g_t^{-1}(z), \quad \frac{\partial}{\partial t} f_t(z) = -\frac{2}{z - U_t} \frac{\partial}{\partial z} f_t(z)$$

$$\gamma(t) = 2 \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha-1/2} e^{\sqrt{-1}\pi(1-\alpha)} \sqrt{t}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$\Updownarrow$

$$U_t = \frac{2(2\alpha-1)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \sqrt{t}, \quad f_t(z) = \sqrt{\frac{4t}{\alpha(1-\alpha)}} \left[ z \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{4t}} + (1-\alpha) \right]^\alpha \left[ z \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{4t}} - \alpha \right]^{1-\alpha}$$

## Schramm の新理論(1999 ~)

O.Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000), 221-228.

Loewner 方程式の駆動関数として

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \kappa > 0$$

とする.

ここで  $B_t$  は  $t=0$  で原点をスタートする1次元標準ブラウン運動(BM).

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z$$

これを **Schramm-Loewner Evolution (SLE)** とよぶ.

(注) ブラウン運動のスケール性より

$$\sqrt{\kappa} B_t = B_{\kappa t}$$

つまり,  $B_t$  はBMの時間スケールの取り方を一様に変更するパラメータにすぎない.



この解  $g_t$  は,  $H$ 内のある曲線  $(0,t]$  を消去して,

$$H - (0,t] \quad H$$

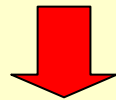
とする共形変換である.

特に

$$\gamma(t) = g_t^{-1}(\sqrt{\kappa} B_t)$$

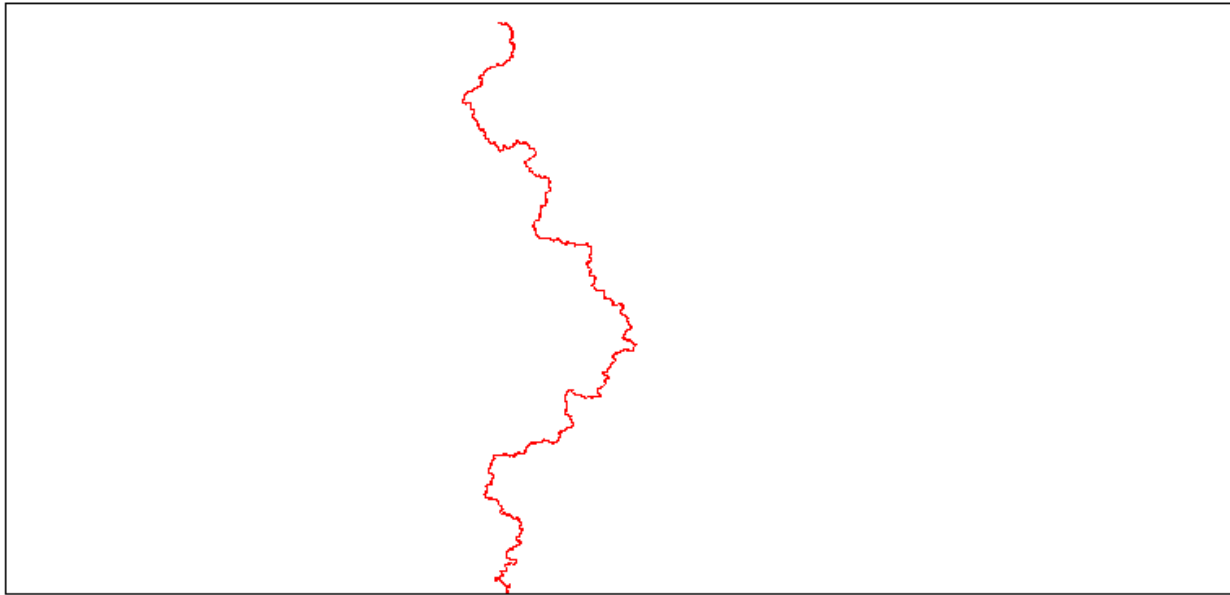
によって,  $\gamma(t)$  の時刻  $t$  での先端の位置が定まる.

$g_t$  は(BMで生成される)共形写像の(時間依存する)統計集団.

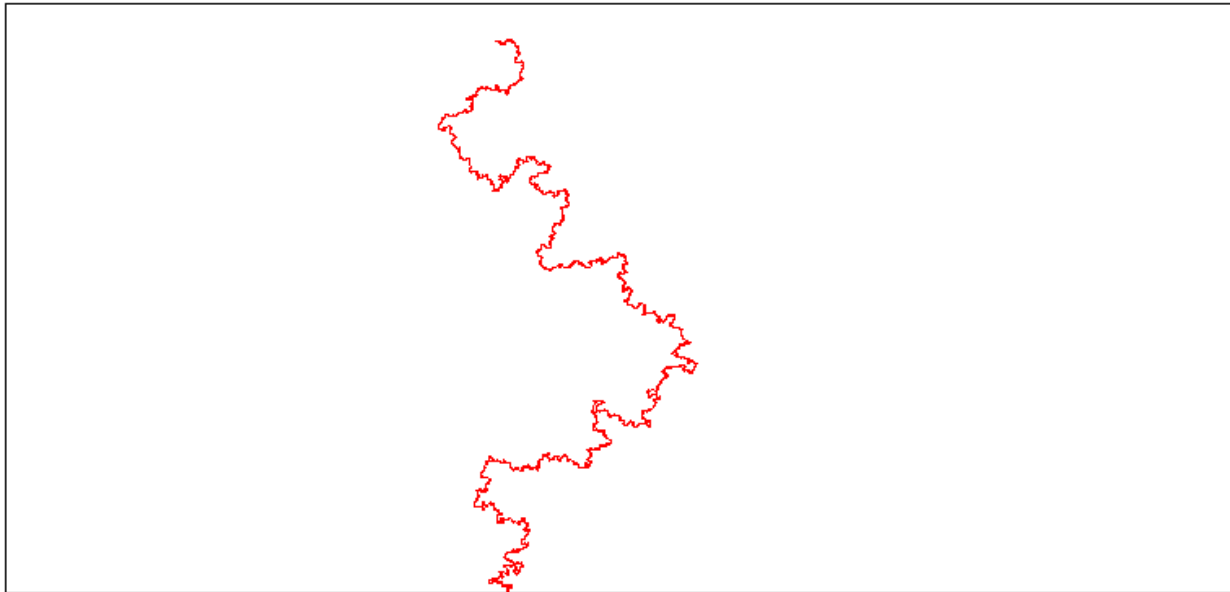


曲線  $\gamma(t)$  の統計法則が定められる.

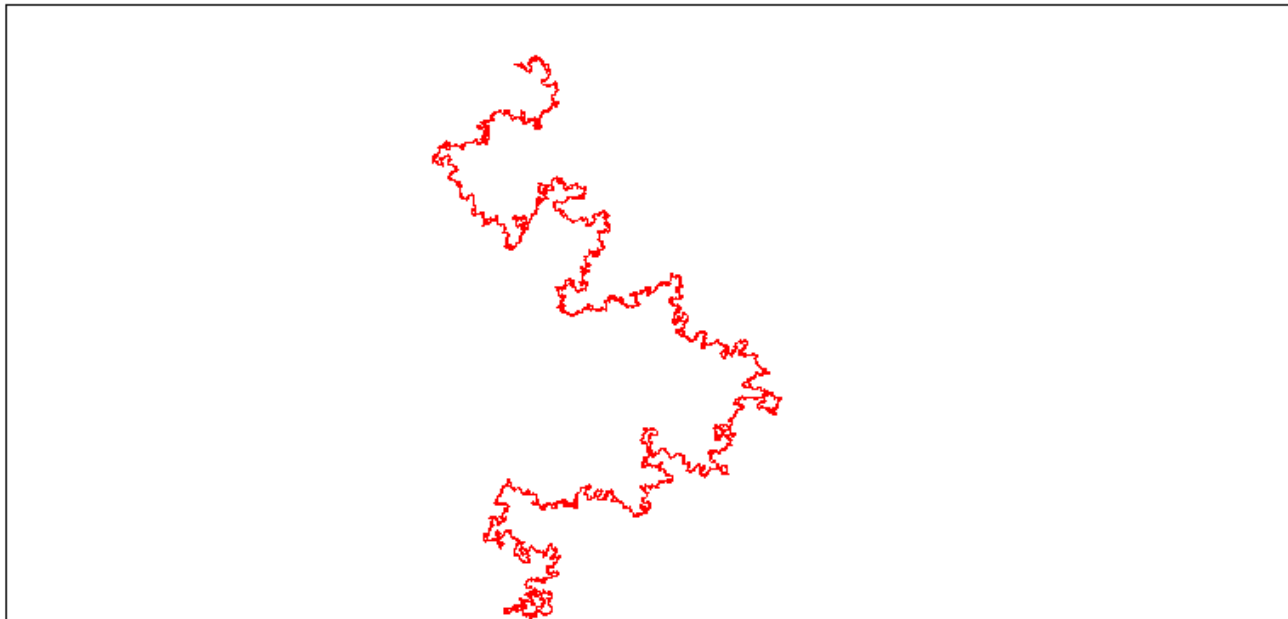
これが求められていた曲線(経路・道)の統計法則の正確な記述である.



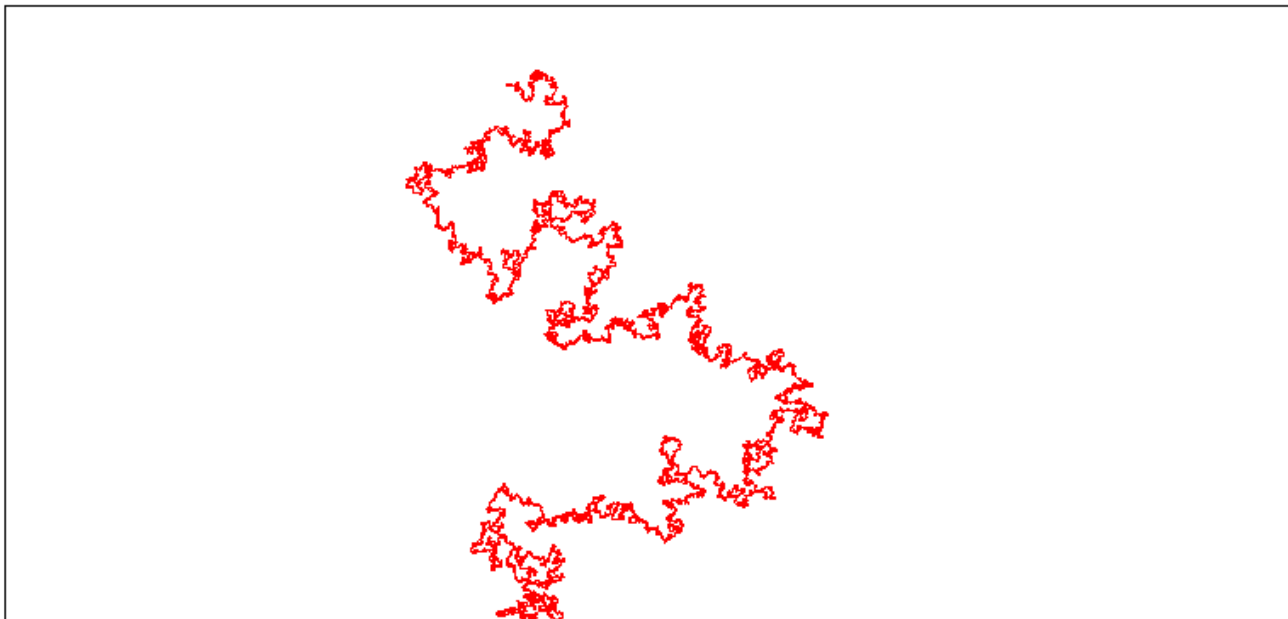
$$\kappa = 1.0$$



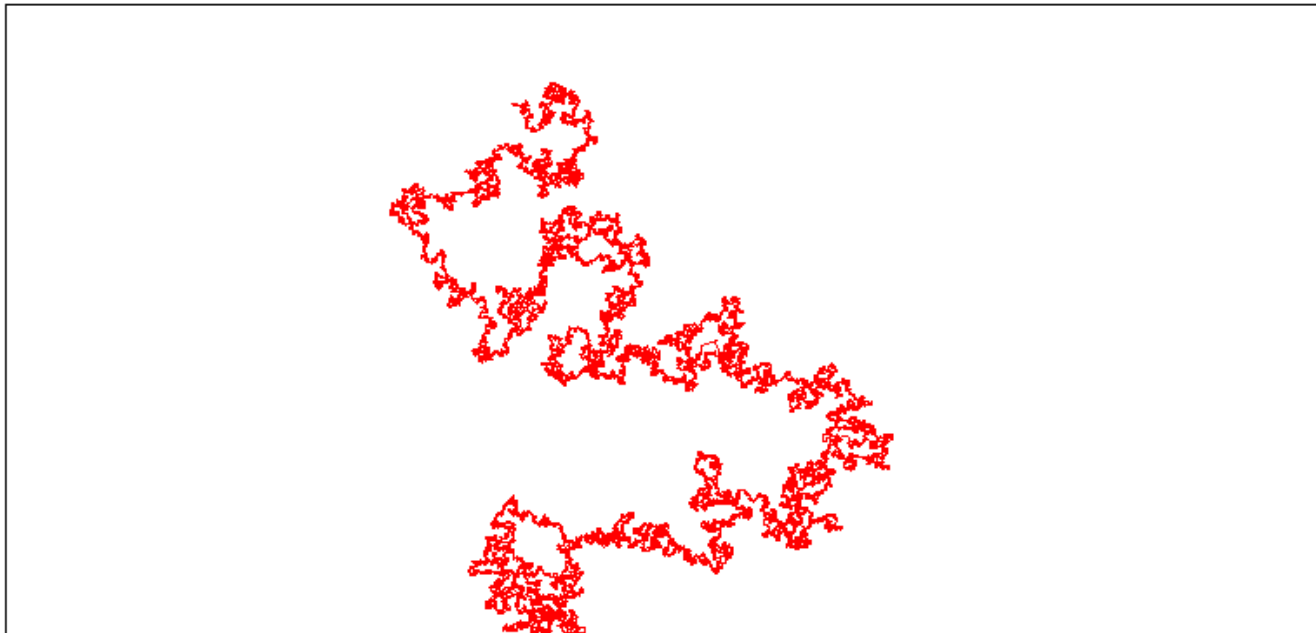
$$\kappa = 2.0$$



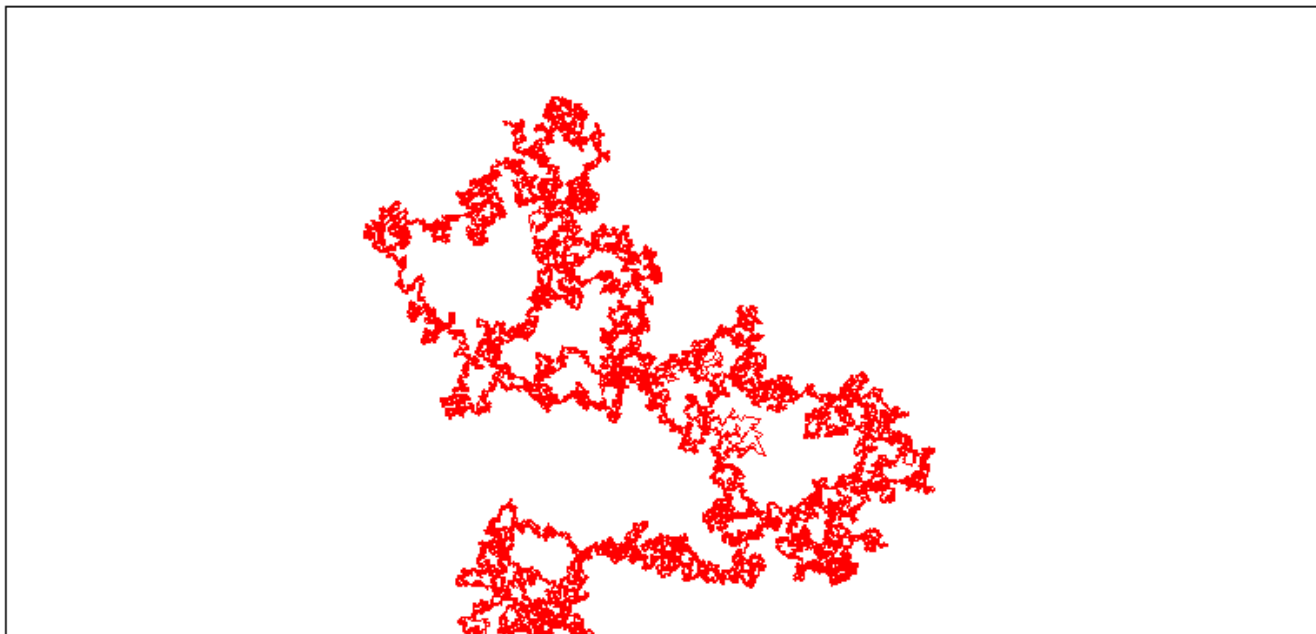
$$\kappa = 3.0$$



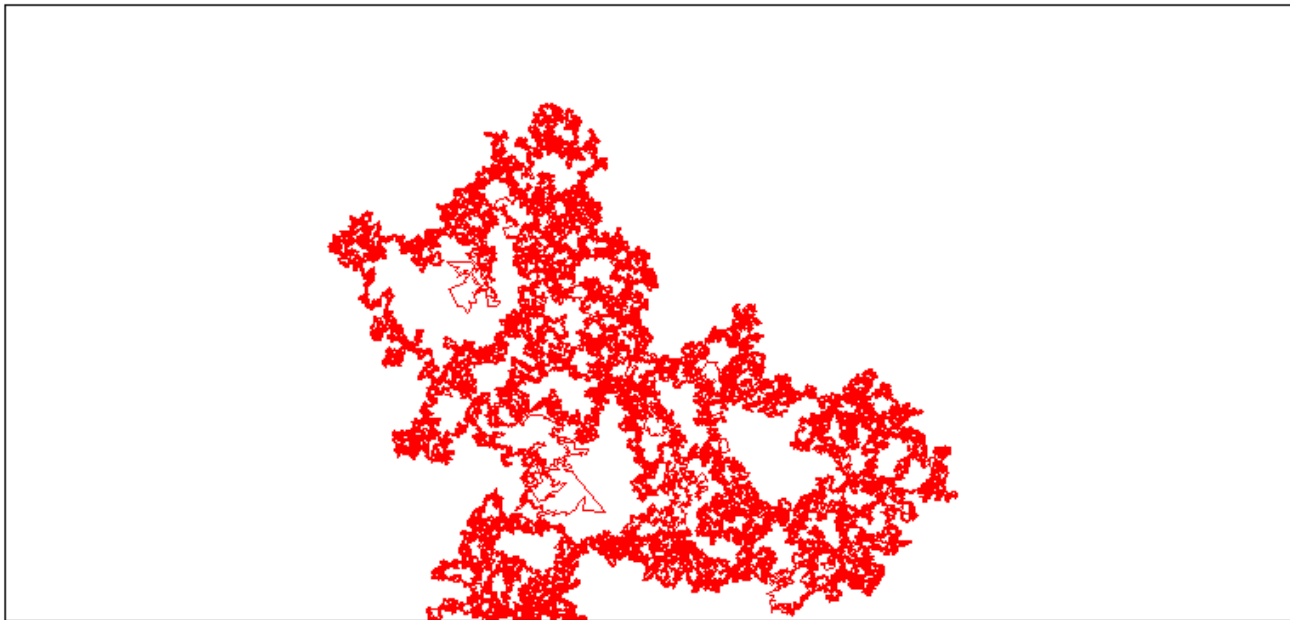
$$\kappa = 4.0$$



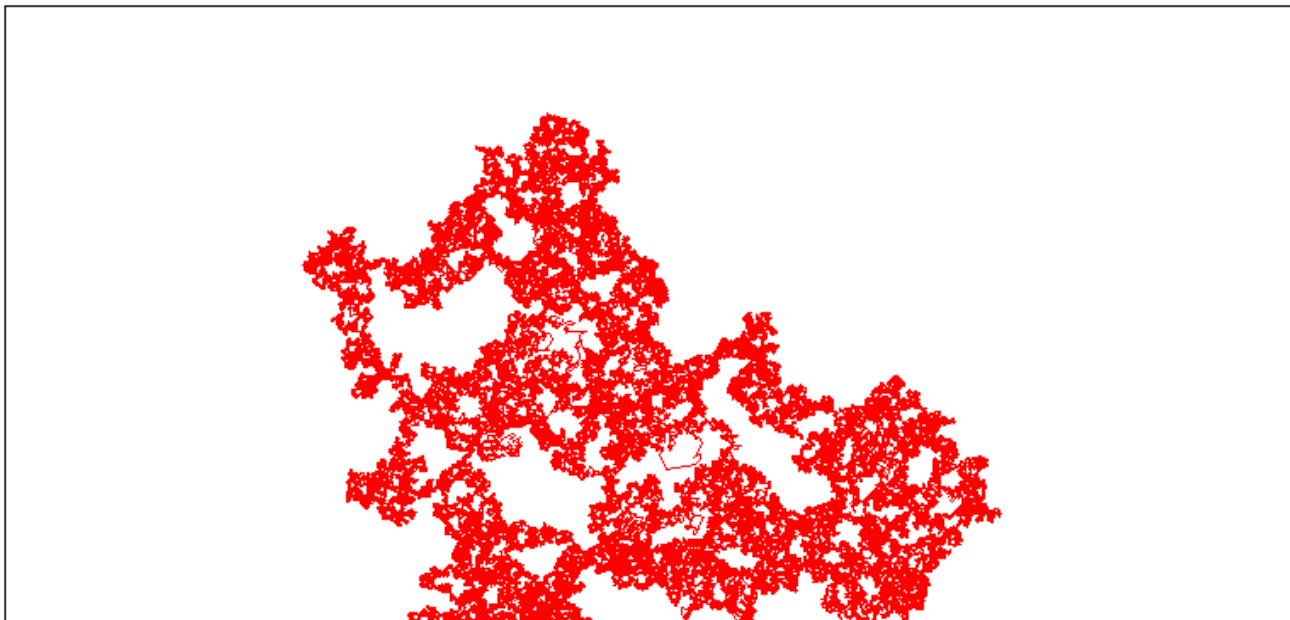
$$\kappa = 5.0$$



$$\kappa = 6.0$$



$$\kappa = 7.0$$



$$\kappa = 8.0$$

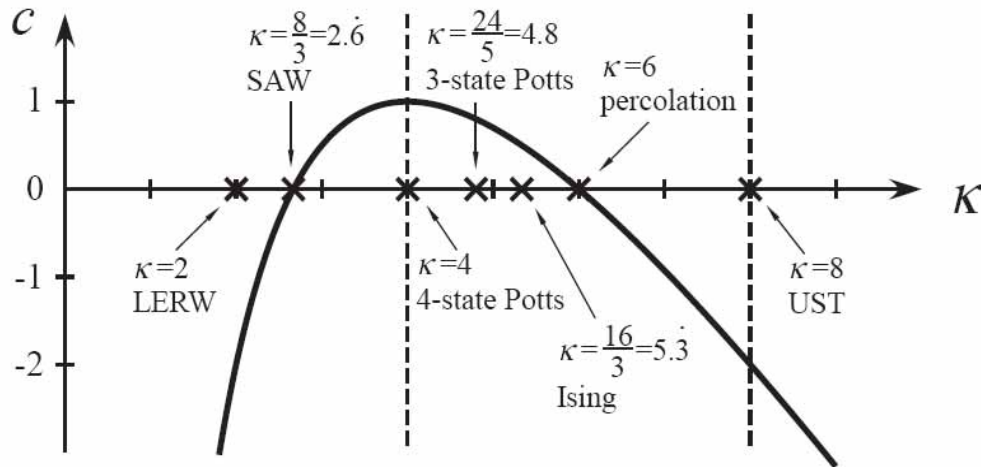
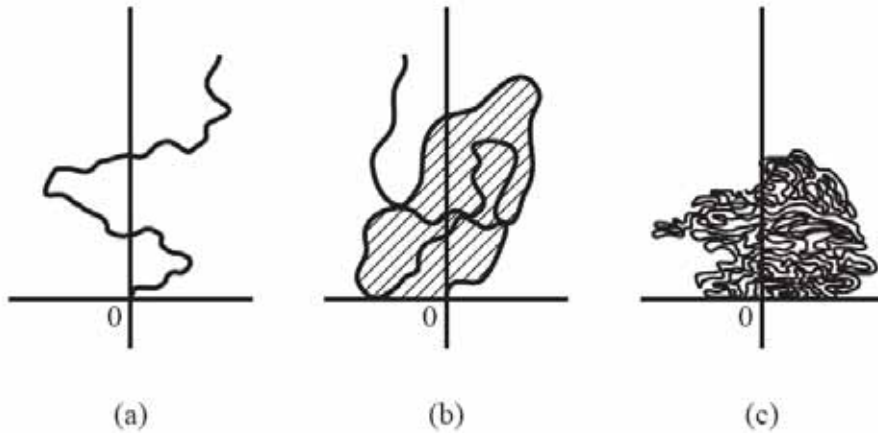


図 4: 2次元格子上的のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される。LERW は Loop Erased Random Walk, UST は平面上一様ランダムな全域木のグラフ (Uniform Spanning Trees) を表す。平面を埋めつくすペアノ曲線を UST から得る方法が知られている。中心電荷  $c$  の値を縦軸にとって (8) 式もプロットした。

$$(a) \quad 0 < \kappa \leq 4$$

$$(b) \quad 4 < \kappa < 8$$

$$(c) \quad \kappa \geq 8$$

$\kappa$  vs. central charge  $c$

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$

$\kappa$  vs. conformal dim.

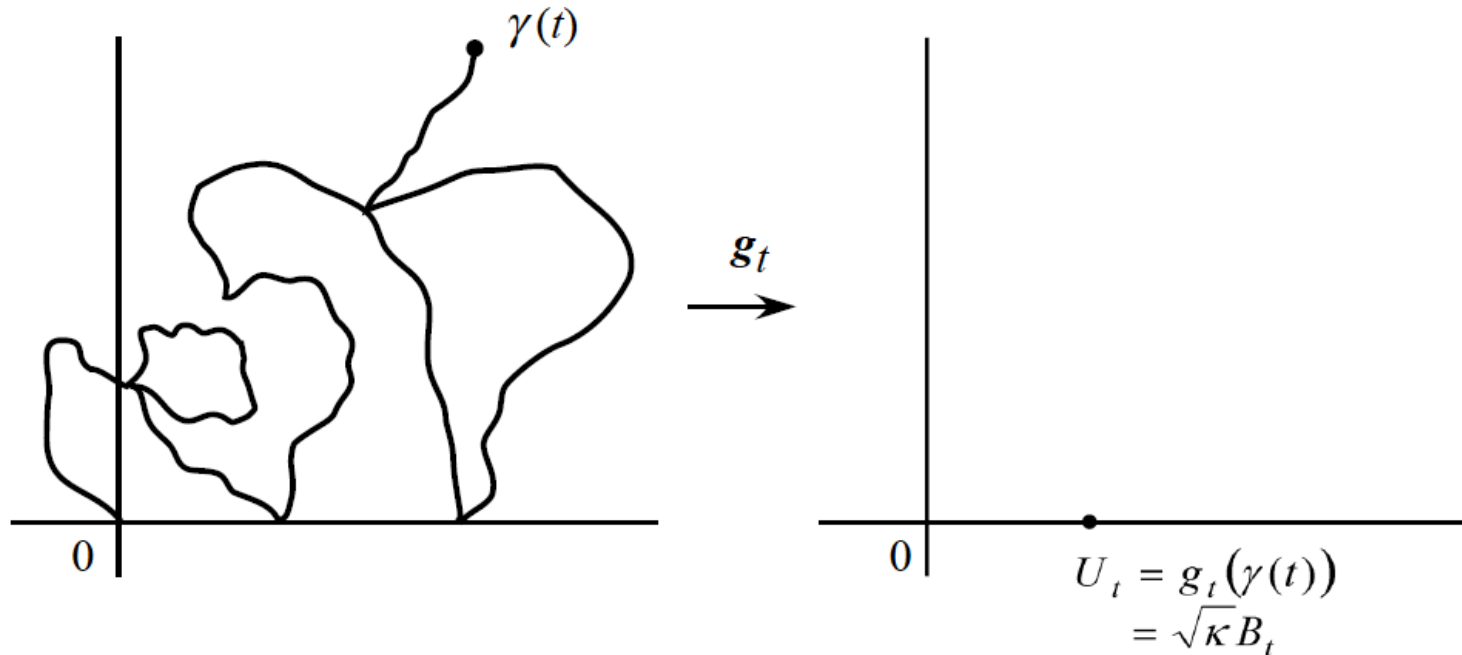
(highest - weight)  $h$

$$h = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$



**Oded Schramm** (December 10, 1961 in Jerusalem, Israel  
– September 1, 2008, Washington State, USA)

## 2. SLE と $BES_d$



$H_t = \mathbf{H} - (0, t]$  の非有界な連続領域

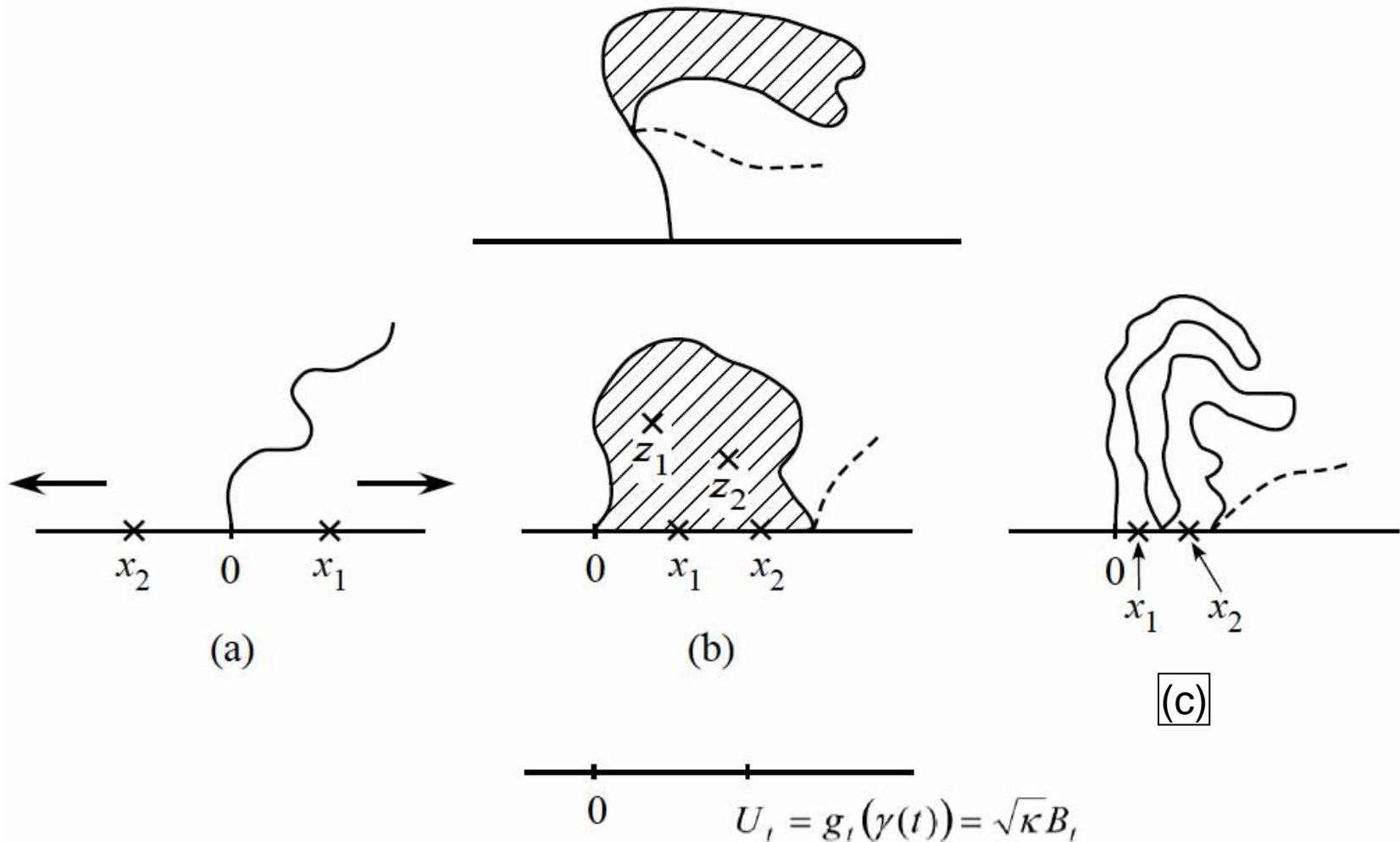
$K_t = \mathbf{H} - H_t$  (hull とよばれる)

$g_t$ : 定義域  $H_t$  (時間が経つと減少していく) 値域  $\mathbf{H}$

$$T_z = \sup \left\{ t \geq 0 : g_t(z) \text{ is well-defined, } g_t(z) \in \mathbf{H} \right\}$$

$$= \inf \left\{ t \geq 0 : z \in K_t \right\}, \quad z \in \mathbf{H}$$





**(b) の場合:**  $(t)$  が実軸  $\mathbb{R}$  と接した瞬間に、斜線領域内の点はすべて同時に**呑み込まれて(swallowed)**、 $(t)$  とともに  $U_t$  に写されてしまう。

**(c) の場合:** には隙間はなく、実軸上の点  $x_1, x_2, \dots$  は原点に近いものから順に  $U_t$  に写されていく。

SLE

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}$$

次の変換をする

$$\hat{g}_t(z) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left( g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t \right)$$

伊藤の公式より

$$d\hat{g}_t(z) = d\tilde{B}_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{\hat{g}_t(z)}$$

z x (実軸上) の極限をとる

$$\hat{g}_t(x) \in \mathbf{R} \text{ for all } t > 0, \quad d\hat{g}_t(x) = d\tilde{B}_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{\hat{g}_t(x)}$$

**d次元ベッセル過程(BESd)**

$$dX_t^x = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x}$$

## $d$ -次元ベッセル過程 (BES $d$ )

$d$ 次元ブラウン運動

$$\mathbf{B}_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \dots, B_t^{(d)}) \in \mathbf{R}^d$$

$$dB_t^{(j)} dB_t^{(k)} = \delta_{jk} dt, \quad 1 \leq j, k \leq d$$

BES $d$  (=  $\mathbf{B}_t$  の動径成分)

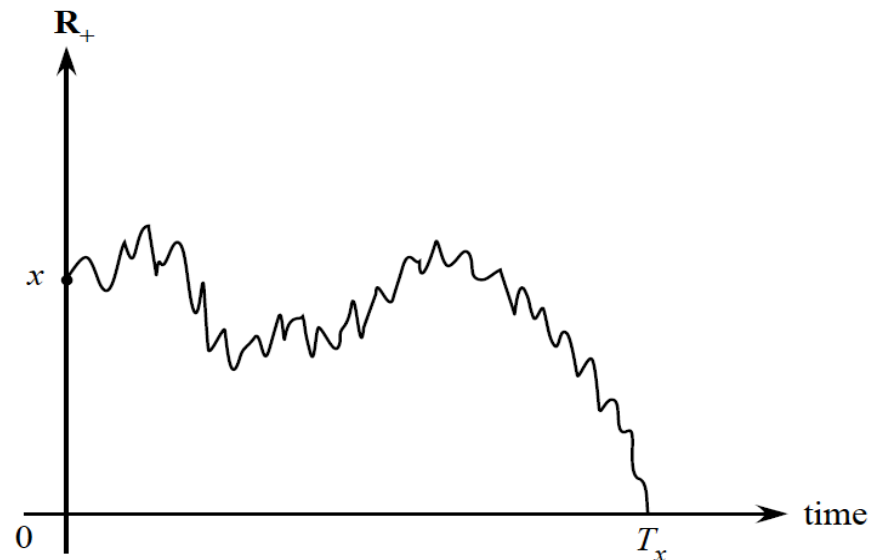
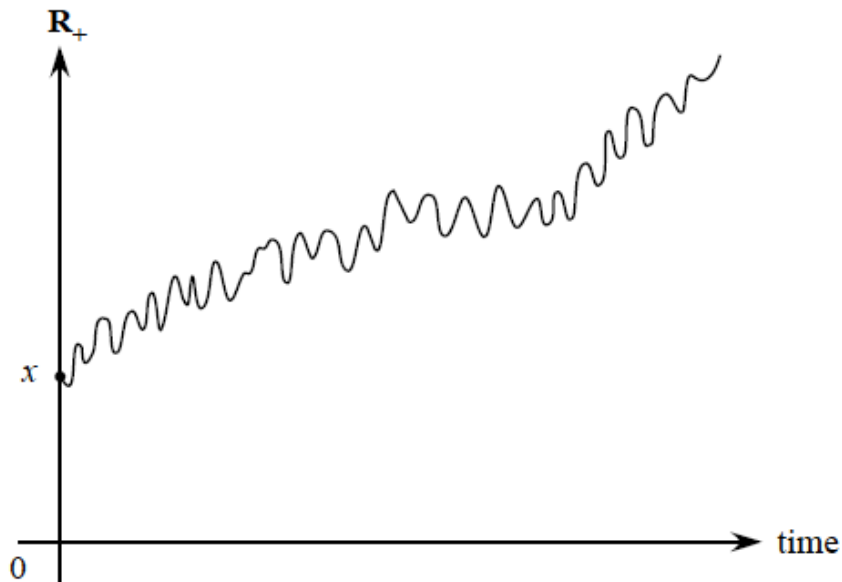
$$X_t \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^d (B_t^{(j)})^2} \in \mathbf{R}_+ \equiv \{x > 0: x \in \mathbf{R}\}$$

伊藤の公式により確率微分方程式(SDE)は次のように求まる

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t}$$

$d$ を1以上の連続変数とする.

$$X_t^x \equiv X_0^x = x \in \mathbf{R}_+ \text{ の初期条件の下での解}$$



$$T_x \equiv \inf \{ t \geq 0 : X_t^x = 0 \}$$

### Theorem 2.1

(i)  $d \geq 2 \Rightarrow T_x = \infty, \forall x > 0$  w.p.1 (with probability one)

(ii)  $d < 2 \Rightarrow T_x < \infty, \forall x > 0$  w.p.1

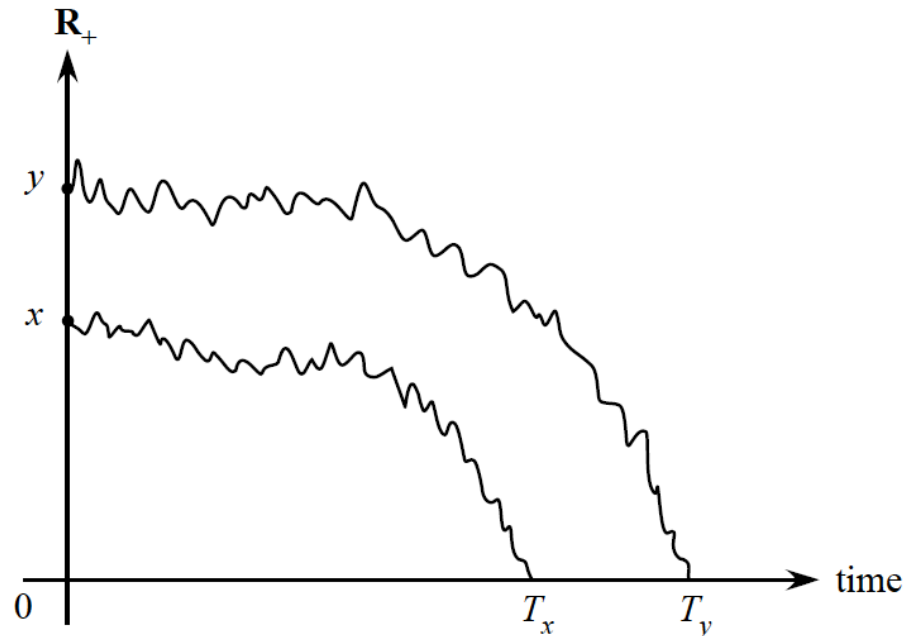
$$1 < d < 2$$

$$X_t^x = x + B_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X_s^x}, \quad t \leq T_x$$

$B_t$  は共通, 初期値  $x$  をいろいろ変えて比較 (coupling)

$$0 < x < y \Rightarrow X_t^x < X_t^y \quad (\forall t < T_x) \Rightarrow T_x \leq T_y$$

**$x < y$  でも  $T_x = T_y$  がありえる.**



## Theorem 2.2

$$(i) \quad \frac{3}{2} < d < 2 \implies \mathbb{P}\left(T_x = T_y\right) > 0 \text{ for } x < y.$$

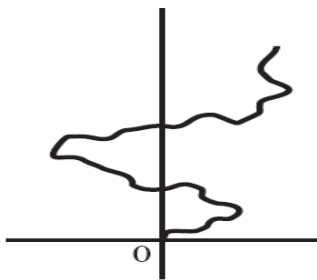
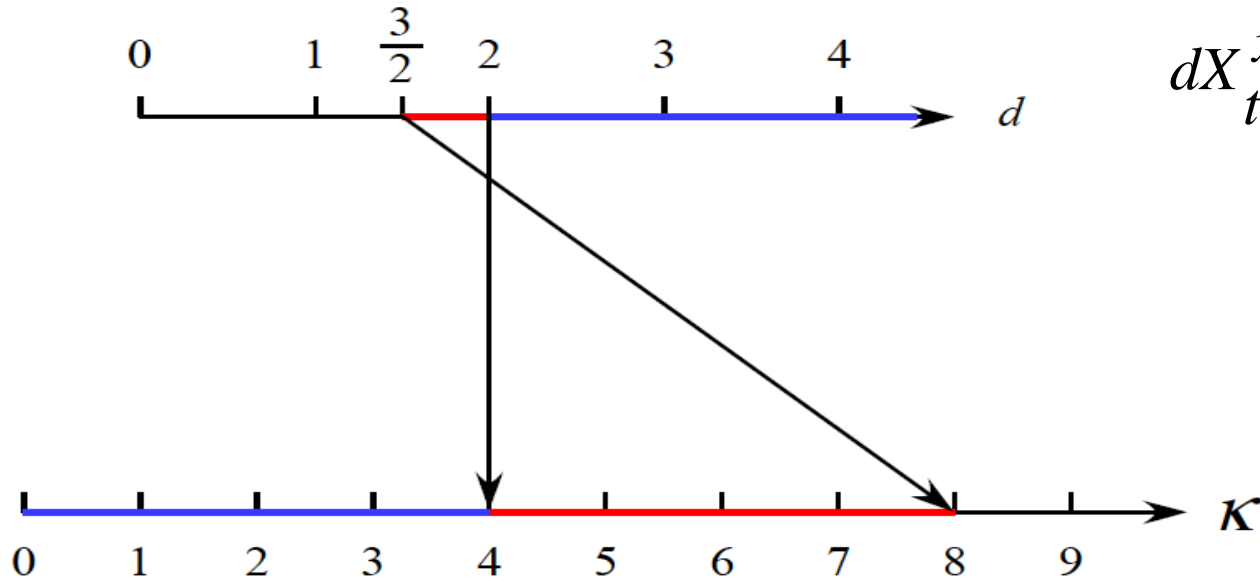
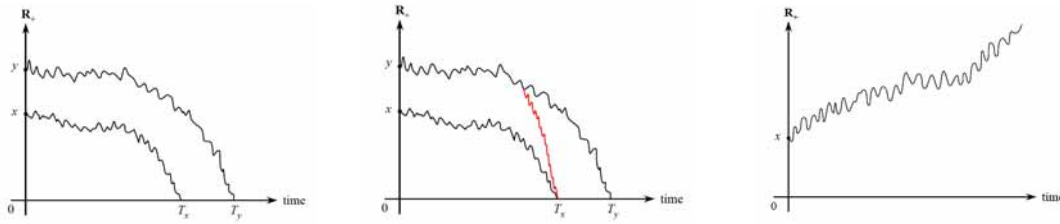
$$(ii) \quad 0 < d \leq \frac{3}{2} \implies T_x < T_y \text{ w.p.1 for } x < y.$$

## Remark

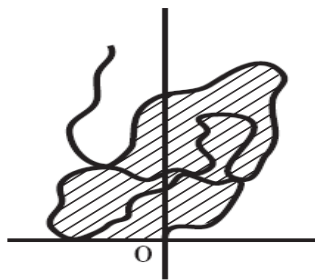
For  $x > 0$ ,  $\frac{3}{2} < d < 2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T_1 = T_{1+x}\right) &= 1 - \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2d-3} \\ &\quad \times F\left(2d-3, d-1, 2(d-1); \frac{x}{1+x}\right). \end{aligned}$$

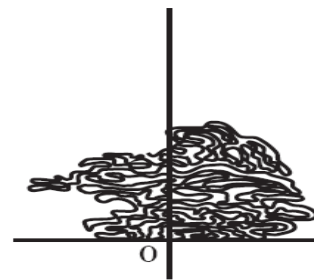
これは、ベッセル過程のマルチンゲール性から導かれる。



(a)



(b)



(c)

$$d\hat{g}_t(x) = dB_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{\hat{g}_t(x)}$$

$$dX_t^x = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x}$$

$$\frac{2}{\kappa} = \frac{d-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\kappa = \frac{4}{d-1}$$

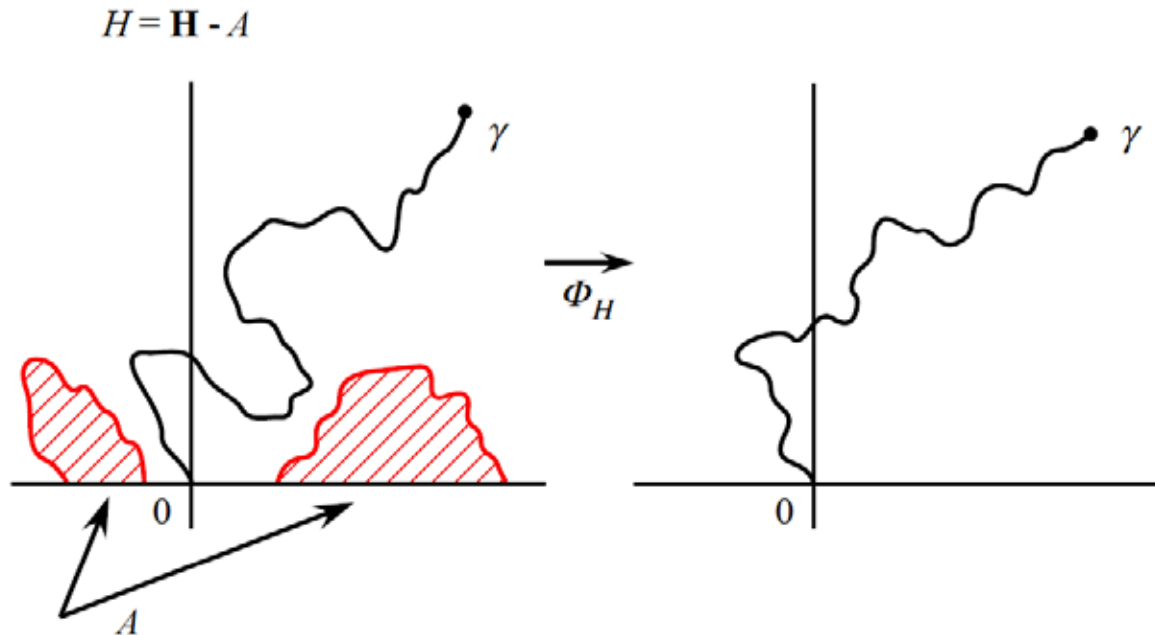
$$\Leftrightarrow$$

$$d = \frac{4}{\kappa} + 1$$

### 3. 共形制限性と共形場理論

$$H = \mathbf{H} - A, \quad 0, \infty \in \partial H$$

$\Phi_H : H \rightarrow \mathbf{H}$  conformal map such that  $\Phi_H(0) = 0$ ,  $\Phi_H(z) \approx z$  (for  $z \rightarrow \infty$ )



**共形制限性 conformal restriction**

probability law of  $\gamma | \{\gamma \subset H\} = \text{probability law of } \Phi_H^{-1}(\gamma)$

(右辺のは, 左辺にあるもとのと同じ)



## Theorem 3.1

$\gamma$ : conformal restriction

$\Downarrow$

$\exists h > 0$  such that

$$P(\gamma \subset H) = (\Phi'_H(0))^h$$

where

$$\Phi'_H(z) = \frac{d}{dz} \Phi_H(z)$$

$h$  = 共形限制性指数 (restriction exponent)

曲線  $\gamma$  として SLE ( $0 < h < 4$  とする) を用いて, 次の条件付き確率を考える.

$$P(\gamma \subset H | \gamma[0, t]) = \left( \Phi'_{g_t(H)}(\sqrt{\kappa} B_t) \right)^h$$

これはマルチンゲールである:

$$E \left[ P(\gamma \subset H | \gamma[0, t]) \mid \mathbf{F}_s \right] = P(\gamma \subset H | \gamma[0, s]), \quad s < t$$

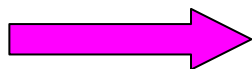
伊藤の公式より

$$\text{Let } \varphi_t = \Phi_{g_t(H)}$$

$$d(\varphi'_t(\sqrt{\kappa} B_t))^h = h(\varphi'_t(\sqrt{\kappa} B_t))^{h-1} d(\varphi'_t(\sqrt{\kappa} B_t))$$

$$\times \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\varphi''_t(\sqrt{\kappa} B_t)}{\varphi'_t(\sqrt{\kappa} B_t)} dB_t + \left\{ \frac{(h-1)\kappa + 1}{2} \frac{(\varphi''_t(\sqrt{\kappa} B_t))^2}{(\varphi'_t(\sqrt{\kappa} B_t))^2} - \frac{8-3\kappa}{6} \frac{\varphi'''_t(\sqrt{\kappa} B_t)}{\varphi'_t(\sqrt{\kappa} B_t)} \right\} dt \right]$$

ドリフト項 ( $dt$  に比例する項) = 0



$$h = 5/8,$$

$$= 8/3$$

と定まる.

### Theorem 3.2

SLE 曲線 は,  $\kappa=8/3$  のときに限り共形制限性をもつ.  
このときの共形制限性指数は  $h=5/8$ .

$$d(\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^h = h(\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^h \times \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\varphi''_t(\sqrt{\kappa}B_t)}{\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t)} dB_t + \left\{ \frac{(h-1)\kappa+1}{2} \frac{(\varphi''_t(\sqrt{\kappa}B_t))^2}{(\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^2} - \frac{8-3\kappa}{6} \frac{\varphi'''_t(\sqrt{\kappa}B_t)}{\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t)} \right\} dt \right]$$

Set

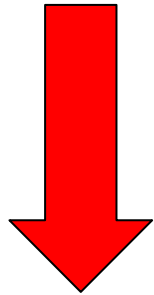
$$\frac{(h-1)\kappa+1}{2} = \frac{3}{2} \frac{8-3\kappa}{6} \Leftrightarrow h = \frac{6-\kappa}{2\kappa}$$

Then we have

$$d(\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^h = h(\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^h \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\varphi''_t(\sqrt{\kappa}B_t)}{\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t)} dB_t - \frac{8-3\kappa}{6} Sf(\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t)) dt \right],$$

where  $Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \frac{(f'')^2}{(f')^2}$  (Schwarzian derivative)

$(\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^h$  : 一般の  $h$  ではマルチンゲールではない



### Girsanov 変換

(「道」に対する確率法則  $P$  を変更する)

$$M_t = (\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^h \exp\left\{\frac{\lambda}{6} \int_0^t S \varphi_s(\sqrt{\kappa}B_s) ds\right\}$$

$$\text{where } \lambda = (8 - 3\kappa)h = \frac{(8 - 3\kappa)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$

$h$  : 共形制限性指数  $\longleftrightarrow$  最高ウェイト (共形次元)

: パラメータ  $\longleftrightarrow$   $-c$  ( $c$ =中心電荷)

# 統計物理模型の連続極限との対応

- **=2**      **loop erased random walk (LERW)**  
Lawler, Schramm, Werner (2004) 正方格子上で証明済.
- **=8/3**      **self-avoiding walk (SAW)**  
**予想** (共形制限性)
- **=6**      **critical percolation**  
Smirnov (2001) 三角格子上で証明済.  
(局所性 locality property)
- **=8**      **uniform spanning trees (UST)**  
Lawler, Schramm, Werner (2004) 正方格子上で証明済.

$$c = (3 - 8)(6 - ) / (2 ) \cdots = 2, 8 \quad c = -2, \quad = 8/3, 6 \quad c = 0$$

# 共形場理論の再構築

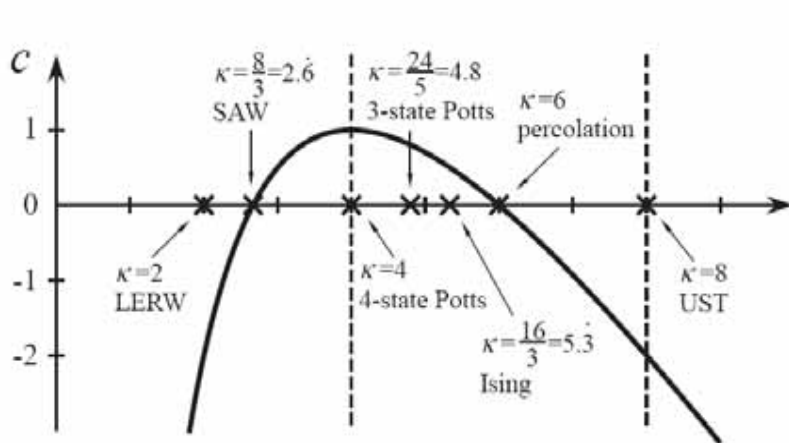


図 4: 2次元格子上のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される。LERW は Loop Erased Random Walk, UST は平面上一様ランダムな全域木のグラフ (Uniform Spanning Trees) を表す。平面を埋めつくすペアノ曲線を UST から得る方法が知られている。中心電荷  $c$  の値を縦軸にとって (8) 式もプロットした。

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$

$$\kappa P(\gamma \subset H) = (\Phi'_H(0))^h \quad \text{with} \quad h = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$M_t = (\varphi'_t(\sqrt{\kappa}B_t))^h \exp\left\{\lambda \int_0^t S\varphi_s(\sqrt{\kappa}B_s) ds\right\}$$

$$\lambda = -c \quad (S\varphi_s(\sqrt{\kappa}B_s) < 0)$$

**< 8/3 のとき  $h > 5/8$  をより「太らせればよい」**

**SLE 曲線 に Brownian loop を密度 で付加する  
(Lawler, Schramm, Werner(2003), Friedrich and Werner (2003))**

**ストレス・テンソルの確率論的な意味づけ (これが出来るのは  $c < 0$  の場合)**

# 数値計算によるSLE研究

共形不変と思われる曲線を, 数値的に描かせたSLE曲線と比較することにより, の値を予測する.

[格子模型] Picco, Santachiara, Numerical study on SLE in nonminimal conformal field theories, PRL **100** (2008).

[乱流] Bernard, Inverse turbulent cascades and conformally invariant curves, PRL **98** (2007). **SQG: surface quasigeostrophic turbulence.**

Zero temperature isolines ··· **SLE<sub>4</sub>**

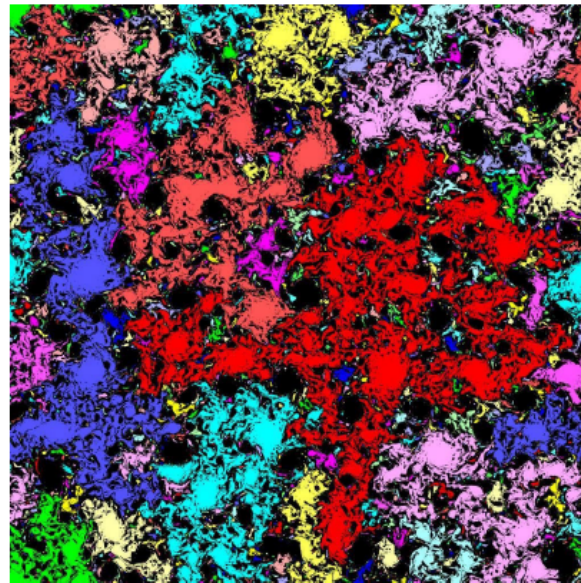


FIG. 2 (color online). Temperature clusters in the inverse cascade of SQG turbulence. These are connected domains with positive temperature. Negative temperature regions are black.

[スピングラス] Amoruso et al., Conformal invariance and SLE in two-dimensional spin glasses, PRL **97** (2006).

[height model] Sabari et al., Conformal curves on the  $\text{WO}_3$  surface, PRL **100** (2008). 酸化タンゲステン表面  
Isoheight lines  $\cdots$  **SLE<sub>3</sub>**

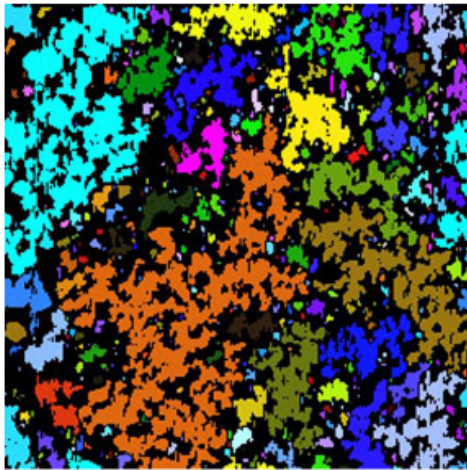


FIG. 2 (color online). The connected domains with positive heights on the  $\text{WO}_3$  surface. Negative height regions are black.

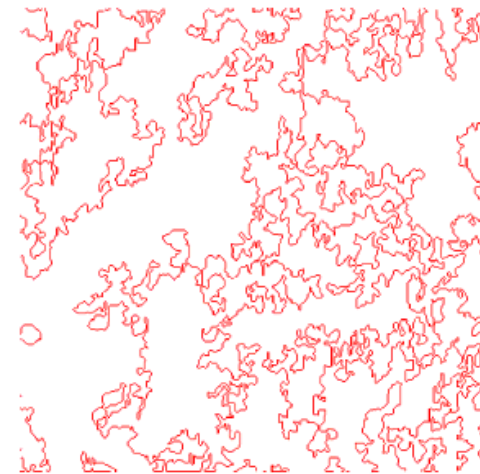


FIG. 3 (color online). Some of the positive height cluster boundaries on a  $\text{WO}_3$  surface (see also Fig. 2).



## 4. おわりに

- 2次元格子上の統計物理模型の臨界現象  
2次元格子模型のフラクタル・パターン  
**連続(スケーリング)極限, 共形場の理論**
- ブラウン運動  
(マルコフ性, スケーリング性, マルチンゲール性)  
ベッセル過程, 複素ブラウン運動, **SLE**  
[別の話題: ランダム行列, 非交差経路, 非衝突拡散過程]
- 粒子系の確率法則・確率過程  
**曲線(道, 経路)の確率法則・確率過程**

**[広告]** 雑誌「数理科学」(サイエンス社)の12月特集号  
「確率論的物理観」で, SLE, 大偏差原理, 流体力学的極限,  
などの解説記事をまとめました.