自己変調過程とベキ乗分布

修士 1 年 宮崎 玄洋

経済物理学とは経済学と物理学をつなげて作られた造語です. 1990 年代後半に生まれた新しい研究分野で, 経済現象を科学的数理的に分析する点で計量経済学や金融工学と共通するものですがそれらと違い特に物理学の視点に立って経済現象を理解しようとします.

現代物理学と経済物理学に共通するキーワードは "揺らぎ" です.

物理学で扱う揺らぎは統計力学での分子の熱揺らぎ (熱運動・熱雑音) , 量子力学での揺らぎは物質の位置と運動量は同時に決定することはできないというハイゼンベルグの不確定性原理から生じるもの等です.

経済学でもさまざまな揺らぎがあります. 株価や為替レート, 需要と供給等です. これらの揺らぎの源としては外部に原因がある場合と, 体系の内部に問題がある場合とがあります. 商品の価格は需要曲線と供給曲線との交点で表される両者の釣り合いの位置によって定まるという理論がありますが, 需要と供給とが安定に均衡する状況というものは現実には見られないそうです.

マンデルブロは 1960 年代に市場価格の変動のデータ解析を行い, ふたつの発見をしています. ひとつは価格の変動のグラフを拡大しても縮小しても同じように見える性質, もうひとつは価格の変位の分布がベキ分布に従っているという性質です.

市場価格の変位の分布が正規分布ではなく, ベキ乗分布になるのかという問題はマンデルブロの発見から 30 年以上解けていない問題でした.

変位の時系列は $x = 0$ の近傍を変動するので, $x = 0$ を中心とする引力 (掛け算のノイズ) が働く状況で, ランダムに外力 (足し算のノイズ) が働くと考えるのが自然な仮定となります. このような過程を考えたとき, その結果, ベキ乗分布が実現するということがシミュレーションと理論解析により示されています. さらにベキ乗分布の指数と掛け算のノイズの間に簡単な公式が成立することも示されました.

2 ページ後半の事を少し詳しく書きます.

$$x(t+1) = b(t)x(t) + f(t) \tag{1}$$

このような確率過程を考え, $b(t), f(t)$ は互いに独立,$f(t)$ は対称なものとします. これを時間発展させたとき, 累積分布関数

$$P(\geq |x|) = \int_{-\infty}^{-|x|} p(x')dx' + \int_{|x|}^{\infty} p(x')dx'$$

($p(x)$ は確率密度) を調べると

$$P(\geq |x|) = |x|^{-\beta} \quad (0 < \beta < 2)$$

このようなベキ乗分布になります. また,

$$\langle b^{\beta} \rangle = 1 \quad (0 < \beta < 2)$$

ベキ乗分布の指数と $b(t)$ の間の公式はこのように書けます.

式 (1) を基本型とする確率過程を自己変調過程と呼びます.

私はシミュレーションでこの式や少し変えたものを時間発展させた時にどのようになるかを調べています. 使う式は以下のものです.

$$x(t+1) = b(t)x(t) + f(t) \tag{2}$$

$$x(t+1) = b_1(t)x(t) + b_2(t)x(t-1) + f(t) \tag{3}$$

$b(t), b_1(t), b_2(t)$ は一様乱数, $f(t)$ は正規乱数です. $b(t), f(t)$ は互いに独立なものとします.

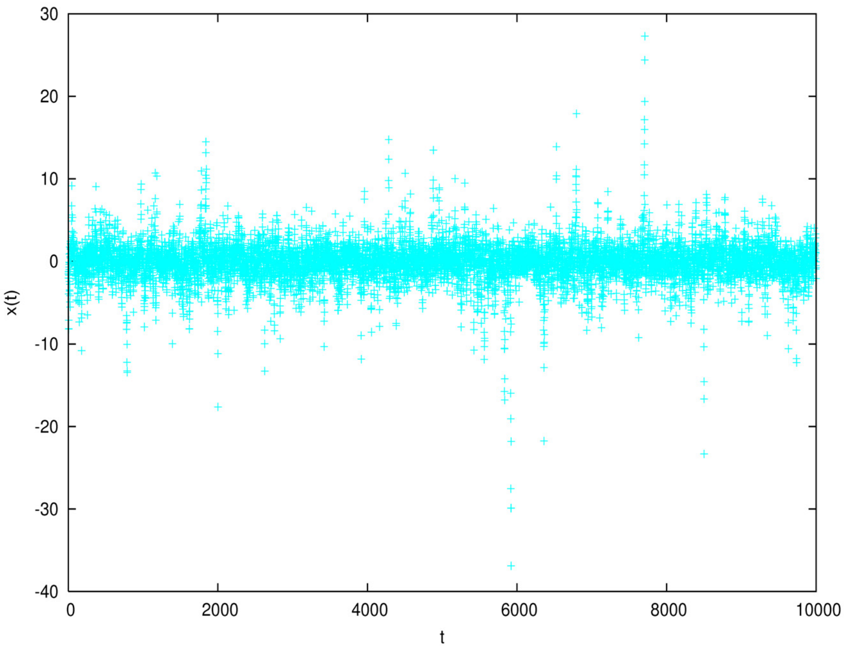

図 1　式 2 の時間発展の様子. $b(t)$ は $\langle b \rangle = 0.8$ の一様乱数. $f(t)$ は平均 0, 分散 1 の正規乱数.

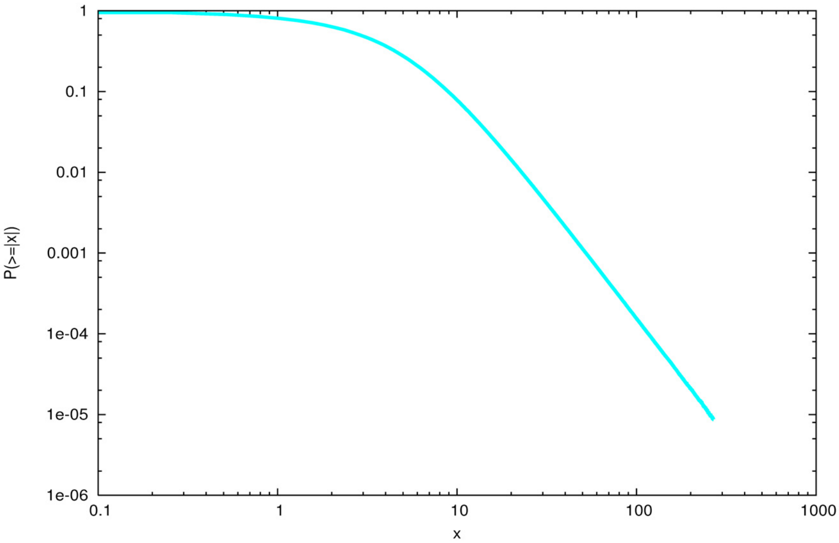

図 2　式 2 の x の累積分布.

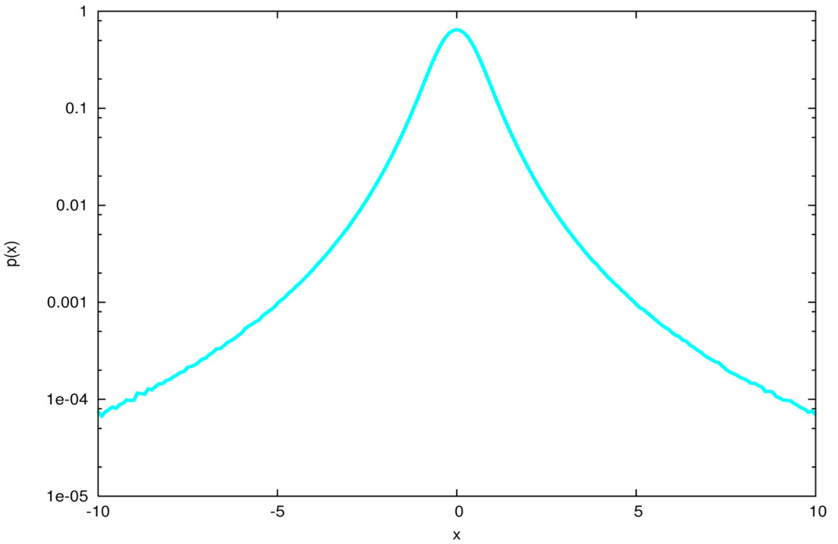

図 3　式 2 の x の確率密度.

図 2,3 とも $b(t)$ は $\langle b \rangle = 0.8$ の一様乱数. $f(t)$ は平均 0, 分散 1 の正規乱数.

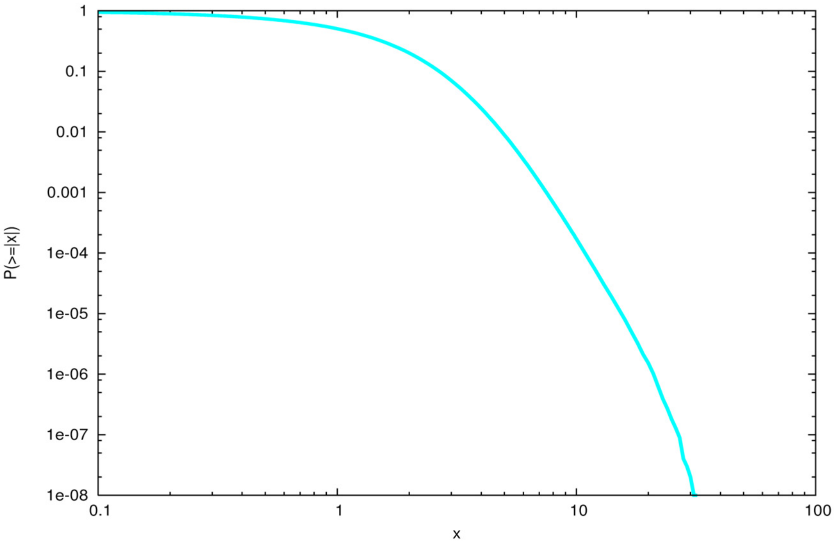

図 4　式 3 の x の累積分布.

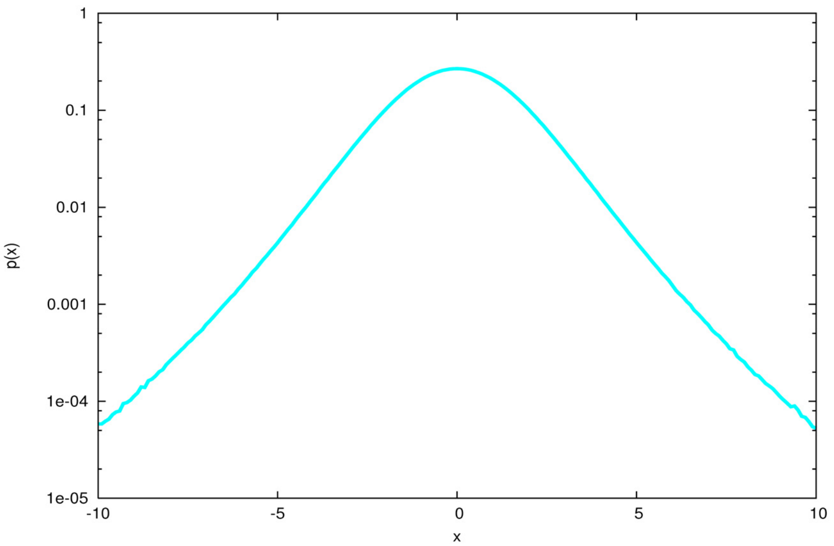

図 5　式 3 の x の確率密度.

図 4,5 とも $b(t)$ は $\langle b \rangle = 0.8$ の一様乱数. $f(t)$ は平均 0, 分散 1 の正規乱数.

今後は $x(t), b(t), f(t)$ を行列に拡張して

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

とし,

$$X(t+1) = B(t)X(t) + F(t)$$

を計算することを考えています.

ベキ乗分布　確率密度関数がベキ乗 (x^a) の関数に従うような分布. ベキ乗関数はスケールを変える変換 $(x \to \lambda x)$ をしても関数型が変化しないので, 拡大や縮小をしても同じように見える.

正規分布 確率密度関数がガウス関数

$$P_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

に従うような分布でガウス分布ともいう.

(m は平均,σ は標準偏差)

レヴィ分布 確率密度関数が

$$P_L(x;\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-c|q|^\mu} \cos(qx) dq$$

に従うような分布で,$\mu = 2, c = 1/2$ のとき $\sigma^2 = 1, m = 0$ の正規分布に等しい. しかしこのレヴィ分布は正規分布よりも広い裾野を持っている.

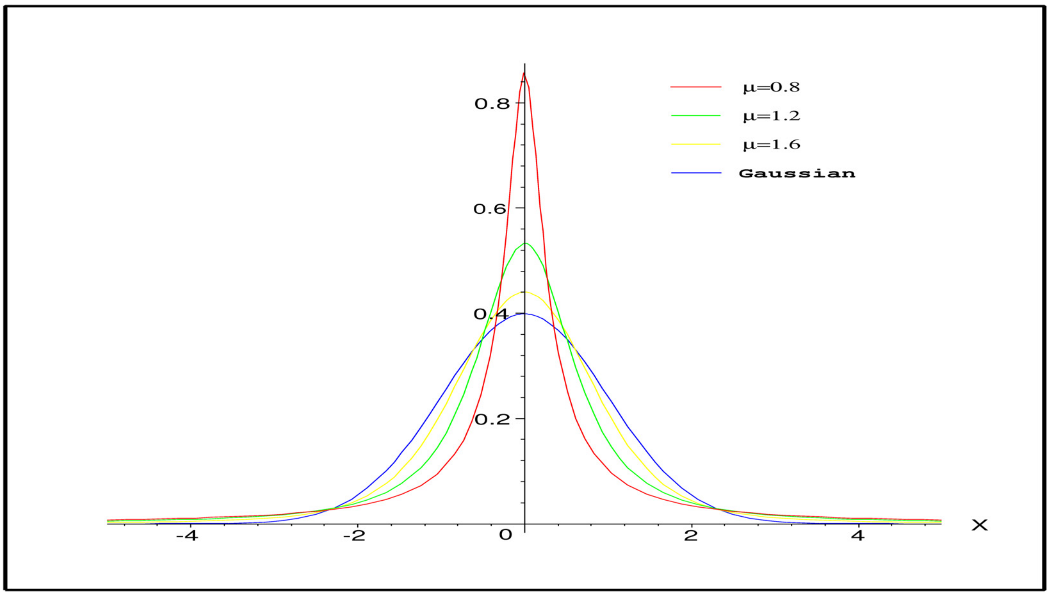

図 6 レヴィ分布で $c = 1/2$ で μ を変化させたときの様子.

参考文献

[1] Hideki Takayasu, Aki-Hiro Sato, and Misako Takayasu. Stable Infinite Variance Fluctuations in Randomly Amplified Langevin Systems. *Physical Review Letters*, Vol. 79, No. 6, 1997.

[2] 高安 秀樹, 高安 美佐子. エコノフィジックス–市場に潜む物理法則. 日本経済新聞社, 2001.

[3] J. -P. ブショー, M. ポッター. 金融リスクの理論–経済物理からのアプローチ–. 朝倉書店, 2003.

[4] 香取眞理. 経済物理の偶然と必然. 数理科学, No. 511, January 2006. 出版予定.

[5] 高安秀樹. 経済物理学の発見. 光文社, 2004.

[6] 山口裕. 自己変調効果を持つ確率過程 Stochastic process with self-modulation effect. Master's thesis, 中央大学, 2005.