

# 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学工学部 香取眞理 (かとりまこと)  
Section 1.A

Summer School 数理物理2009 「ベキ乗則の数理」

2009年8月27 - 30日

東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

# 0. 概要

## 1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

### 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限

ループ除去ランダムウォーク

(loop-erased RW : LERW)

自己回避ウォーク

(self-avoiding walk : SAW)

臨界浸透模型

(critical percolation model)

臨界 Ising 模型

(critical Ising model)

### 1.2 共形不変性と領域 Markov 性

共形共変性と共形不変性(conformal cov./inv.)

領域 Markov 性(domain Markov property)

### 1.3 制限性と局所性

制限性(restriction property)

局所性(locality property)

# 0. 概要

## 1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

### 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限

[格子上の離散模型]  $\xrightarrow{\text{連続極限}}$  [連続関数(曲線)空間上の測度]

ループ除去ランダムウォーク  
(loop-erased RW : LERW)



$\mu^{\text{LERW}}$

自己回避ウォーク  
(self-avoiding walk : SAW)



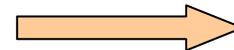
$\mu^{\text{SAW}}$

臨界浸透模型  
(critical percolation model)



$\mu^{\text{per}}$

臨界 Ising 模型  
(critical Ising model)



$\mu^{\text{Ising}}$

### 1.2 共形不変性と領域 Markov 性

共形共変性と共形不変性(conformal cov./inv.)

領域 Markov 性(domain Markov property)

} 上の4つに共通

### 1.3 制限性と局所性

制限性(restriction property)

$\mu^{\text{LERW}}$  : NG,  $\mu^{\text{SAW}}$  : **OK**

局所性(locality property)

$\mu^{\text{Ising}}$  : NG,  $\mu^{\text{per}}$  : **OK**

## 2. 確率解析と Bessel 過程

2.1 Brown 運動, martingale, Ito の公式

2.2  $d$  次元 Bessel 過程 ( $BES_d$ ) の定義

2.3  $BES_d$  の次元性

## 3. Schramm-Loewner Evolution (SLE)

3.1 Riemann の写像定理について

3.2 複素上半平面内の曲線と共形変換

3.3 Loewner の微分方程式

3.4 SLE と  $BES_d$

## 4. SLE と物理系との対応

### 4.1 Schramm のアイデア

共形不変性 + 領域 Markov 性  $\longleftrightarrow \mu^\kappa, \kappa \in (0, \infty)$

### 4.2 局所性と制限性

局所性  $\Leftrightarrow \mu^6$  (SLE<sub>6</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{per}}$

制限性  $\Leftrightarrow \mu^{8/3}$  (SLE<sub>8/3</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{SAW}}$

### 4.3 対応関係

## 4. SLE と物理系との対応

### 4.1 Schramm のアイデア

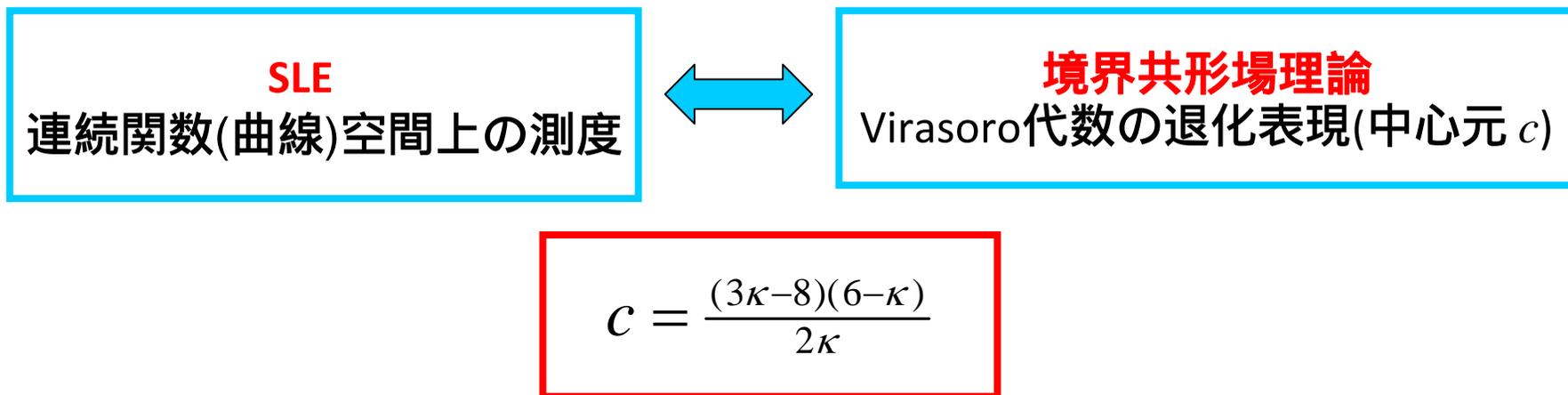
共形不変性 + 領域 Markov 性  $\longleftrightarrow \mu^\kappa, \kappa \in (0, \infty)$

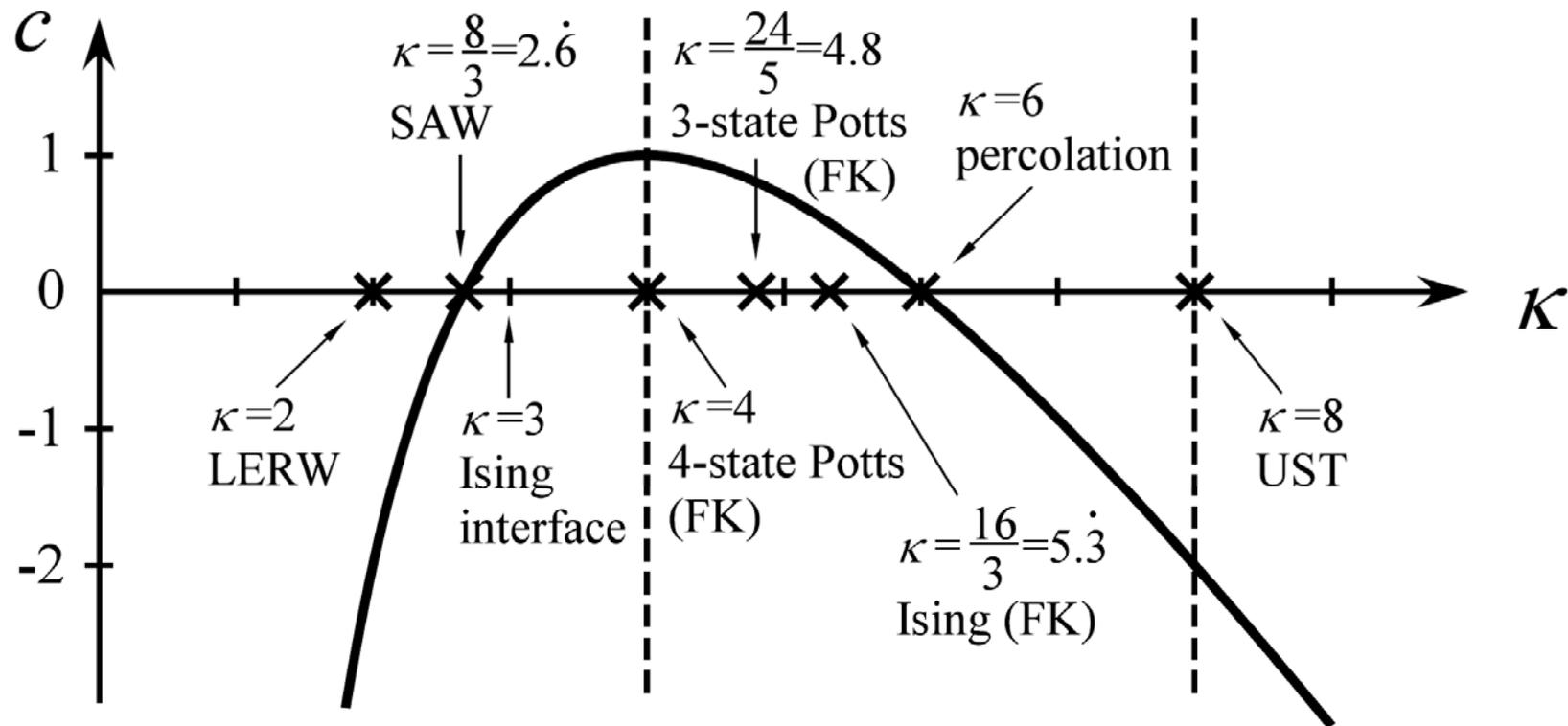
### 4.2 局所性と制限性

局所性  $\Leftrightarrow \mu^6$  (SLE<sub>6</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{per}}$

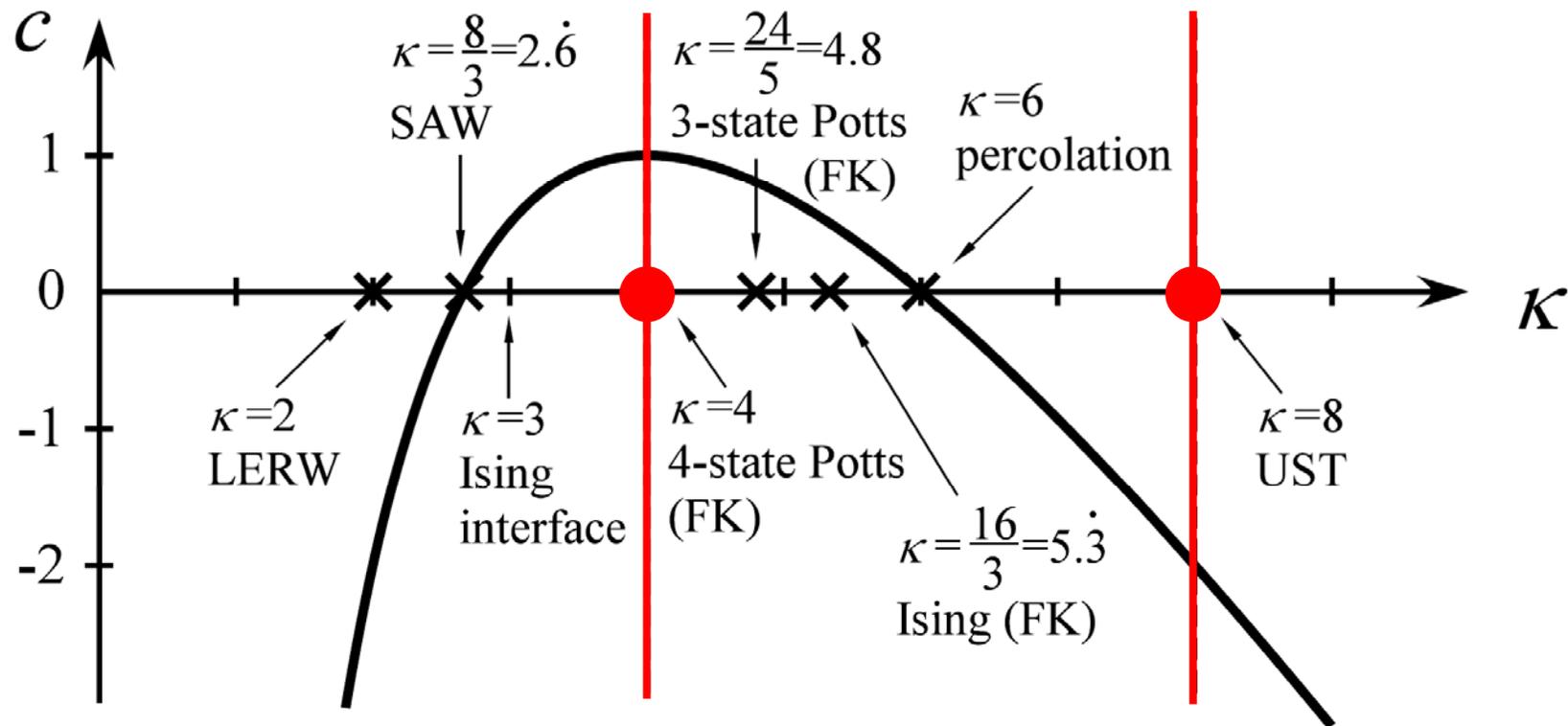
制限性  $\Leftrightarrow \mu^{8/3}$  (SLE<sub>8/3</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{SAW}}$

### 4.3 対応関係

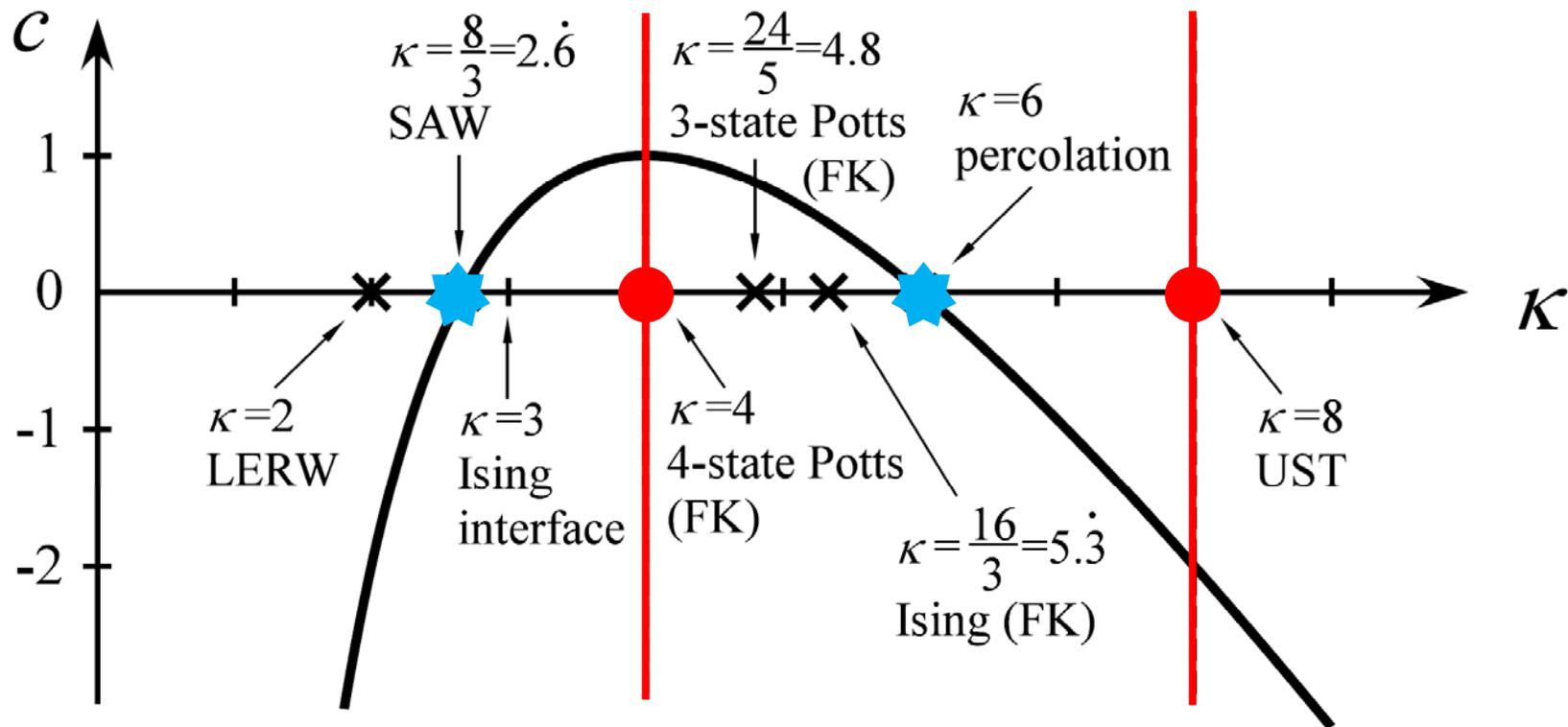




- SLE 曲線の径数  $\kappa$  と中心電荷  $c$  との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.



- SLE 曲線の径数  $\kappa$  と中心電荷  $c$  との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.



- SLE 曲線の径数  $\kappa$  と中心電荷  $c$  との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.

## 4. SLE と物理系との対応

### 4.1 Schramm のアイデア

共形不変性 + 領域 Markov 性  $\longleftrightarrow \mu^\kappa, \kappa \in (0, \infty)$

### 4.2 局所性と制限性

局所性  $\Leftrightarrow \mu^6$  (SLE<sub>6</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{per}}$

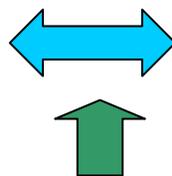
制限性  $\Leftrightarrow \mu^{8/3}$  (SLE<sub>8/3</sub>)  $\Leftrightarrow \mu^{\text{SAW}}$

### 4.3 対応関係

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$

**SLE**

連続関数(曲線)空間上の測度



**境界共形場理論**

Virasoro代数の退化表現(中心元  $c$ )

• 平面上のフラクタル曲線の統計物理 (SLE <sub>$\kappa$</sub>  :  $0 < \kappa \leq 4$ )

LERW, SAW

• 平面上の平衡統計力学模型

浸透模型(percolation), 磁性体の模型(Ising model)

(SLE <sub>$\kappa$</sub>  :  $4 < \kappa < 8$ )

• ランダムなペアノ曲線と非平衡統計模型(自己組織化臨界現象)

雪崩模型(Abelian sandpile model), 森林火災模型

(SLE <sub>$\kappa$</sub>  :  $\kappa = 8$ )

# The 2006 Fields Medals

11



## Wendelin Werner



Laboratoire de  
Mathématiques  
Université Paris-Sud

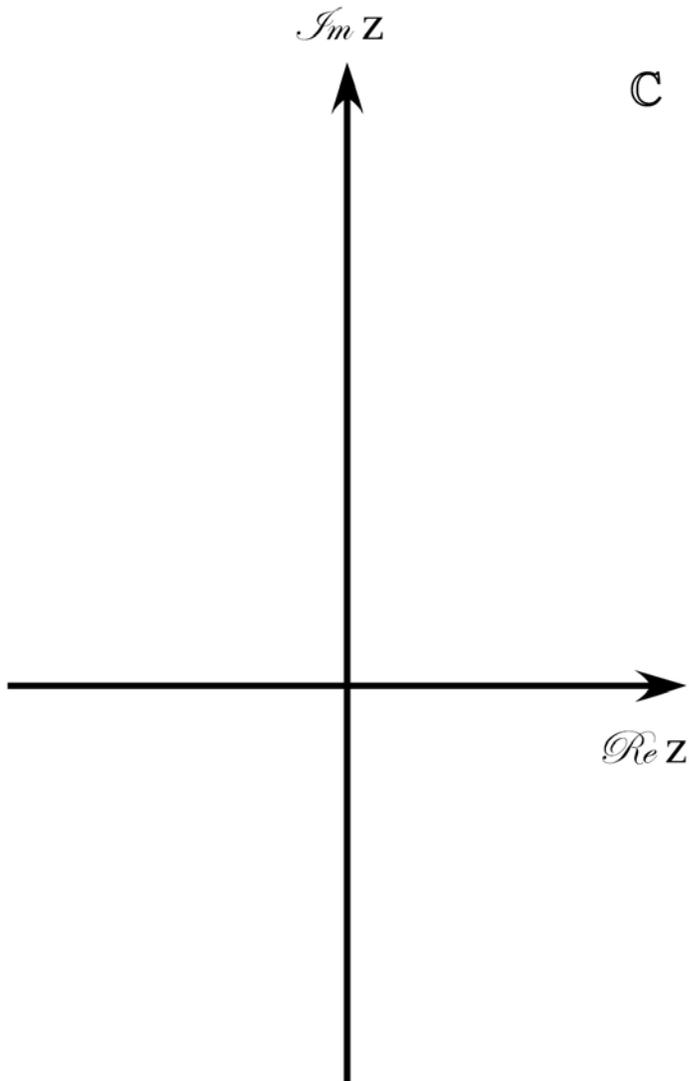
for his contributions to the development of stochastic Loewner evolution, the geometry of two-dimensional Brownian motion, and conformal field theory



- O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.
- G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, American Math. Soc., 2005.
- R. Friedrich and W. Werner, Conformal restriction, highest-weight representations and SLE, *Commun. Math. Phys.* **243** (2003) 105-122.
- S. Smirnov, Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, *C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I Math.* **333** (2001) 239-244.
- S. Smirnov, Conformal invariance in random cluster models, I. Holomorphic fermions in the Ising model, arXiv:0708.0039.
- V. Beffara, The dimension of the SLE curves, *Ann. Probab.* **36** (2008) 1421-1452.
- 香取眞理, 「臨界現象・フラクタル研究の新世紀 —SLE の発見—」, *日本物理学会誌*, **62** (no.7) (2007) 527-531.

# 1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

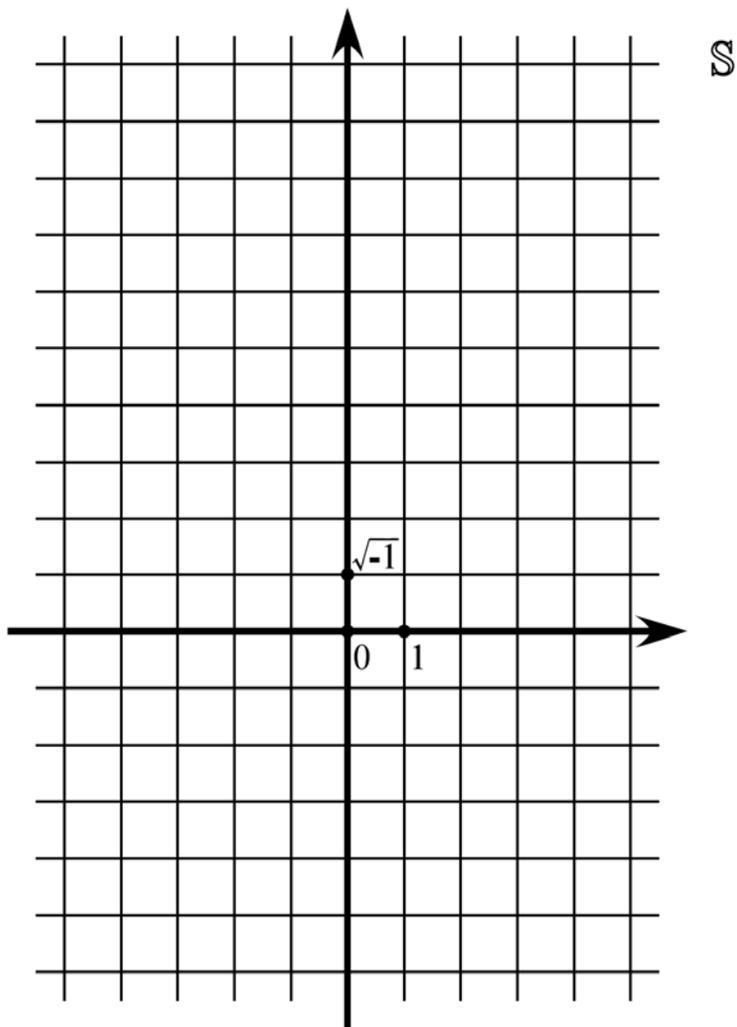
## 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限



複素平面  $\mathbb{C} = \{z = x + \sqrt{-1}y : x, y \in \mathbb{R}\}$

# 1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

## 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限



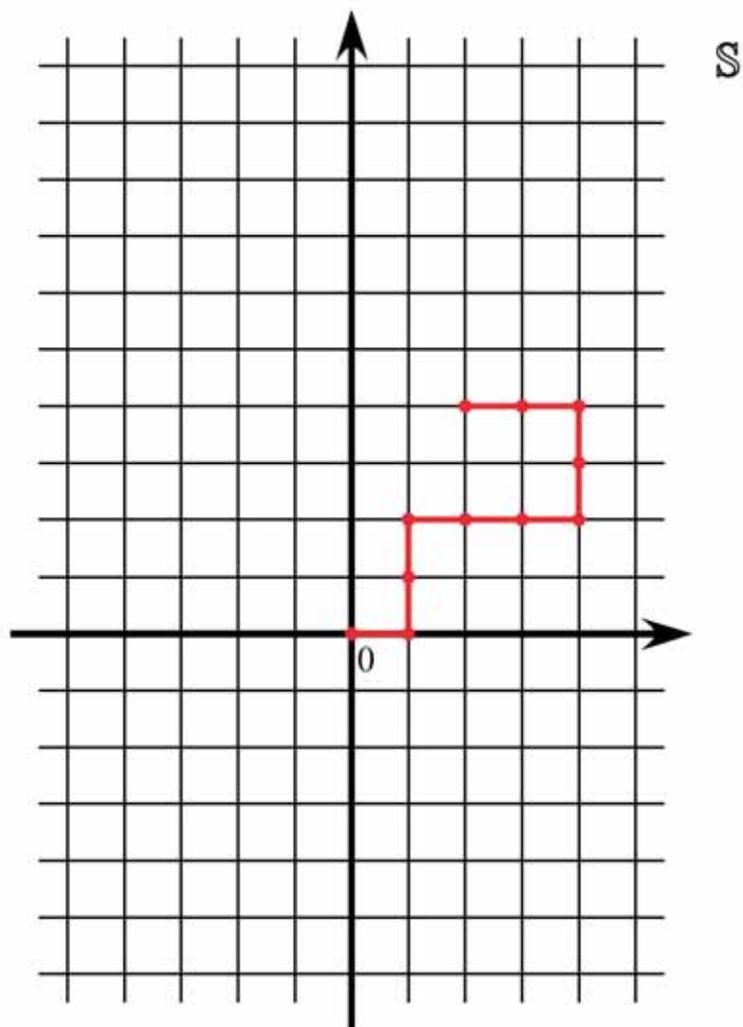
$\mathcal{S}$

複素平面  $\mathbb{C} = \{z = x + \sqrt{-1}y : x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$  上の正方格子  $\mathbf{S} = \{z = j + \sqrt{-1}k : j, k \in \mathbb{Z}\}$

# 1. 統計力学模型と連続関数空間上の測度

## 1.1 平面上の統計力学模型の連続極限



$\mathcal{S}$

複素平面  $\mathbb{C} = \{z = x + \sqrt{-1}y : x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$  上の正方格子  $\mathcal{S} = \{z = j + \sqrt{-1}k : j, k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{S}$  上の最近接ウォークの道  $\omega = (\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n))$

出発点  $\omega(0) = z \in \mathcal{S}$

$\omega(i) \in \mathcal{S}, \quad 1 \leq i \leq n$

$|\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, \quad 1 \leq i \leq n$

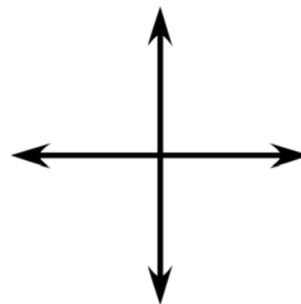
$n =$  道の長さ

左図は出発点を  $z = 0$  (原点) とした場合.





$$\begin{aligned}
 \mathbb{S} \quad & \left. \begin{array}{l} \text{出発点が } z \in \mathbb{S} \\ \text{長さが } n \end{array} \right\} \text{の道全体の集合} \\
 & \equiv W_n^z \\
 & = \left\{ \omega = (\omega(0), \dots, \omega(n)) : \omega(0) = z, \right. \\
 & \quad \left. \omega(i) \in \mathbb{S}, |\omega(i) - \omega(i-1)| = 1, 1 \leq i \leq n \right\}.
 \end{aligned}$$

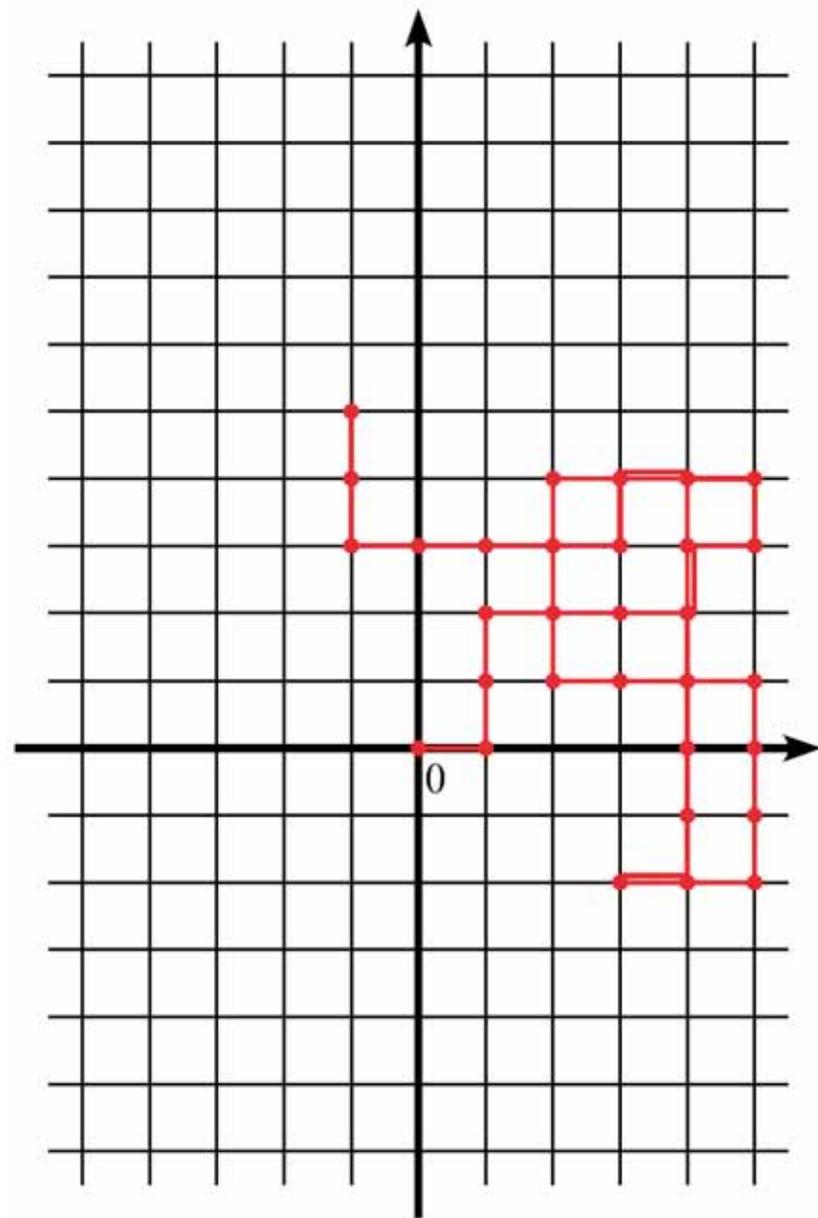


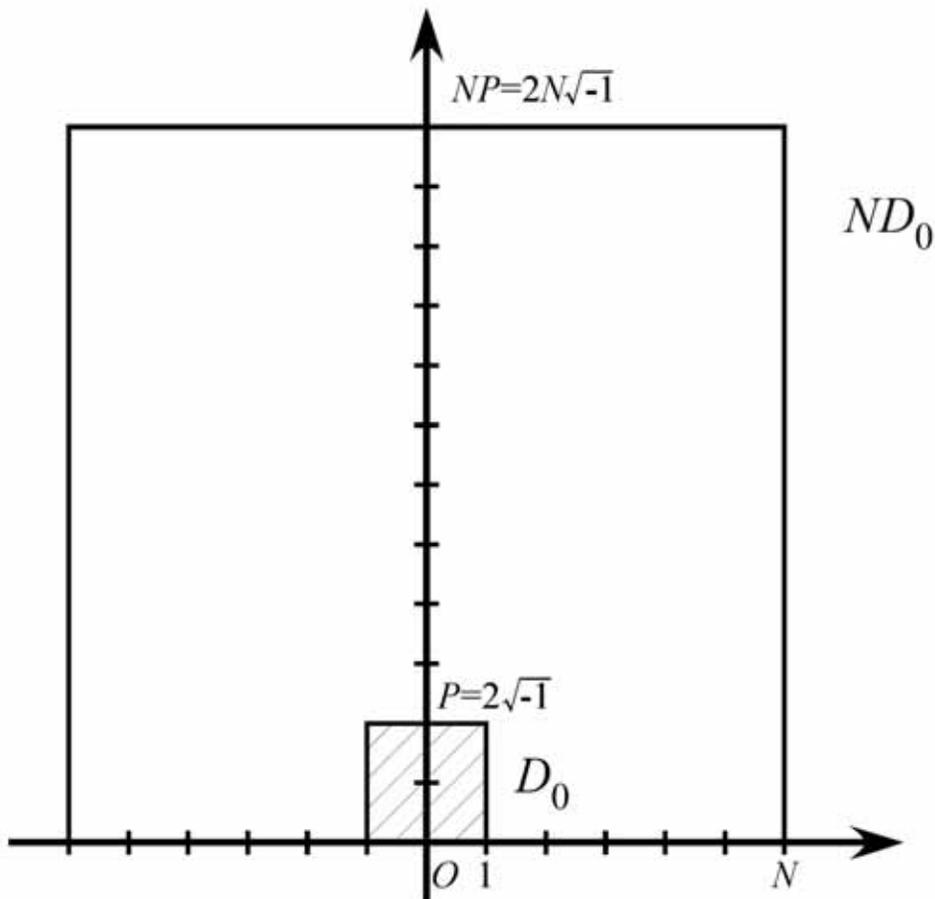
各ステップは上下左右の4通りあるので、 $|W_n^z| = 4^n$ .

(出発点  $z$ , 長さ  $n$  の) ランダムウォーク (random walk : RW)  
 $\equiv W_n^z$  の元の一様分布 (道の統計集団)

定義より、各々の道  $\omega \in W_n^z$  の測度は

$$\frac{1}{|W_n^z|} = \frac{1}{4^n} = 4^{-|\omega|}. \quad \text{ただし、} |\omega| = \text{道 } \omega \text{ の長さ.}$$





- 正方形の開領域

$$D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

$$O = 0 \text{ (原点)} \in \partial D_0$$

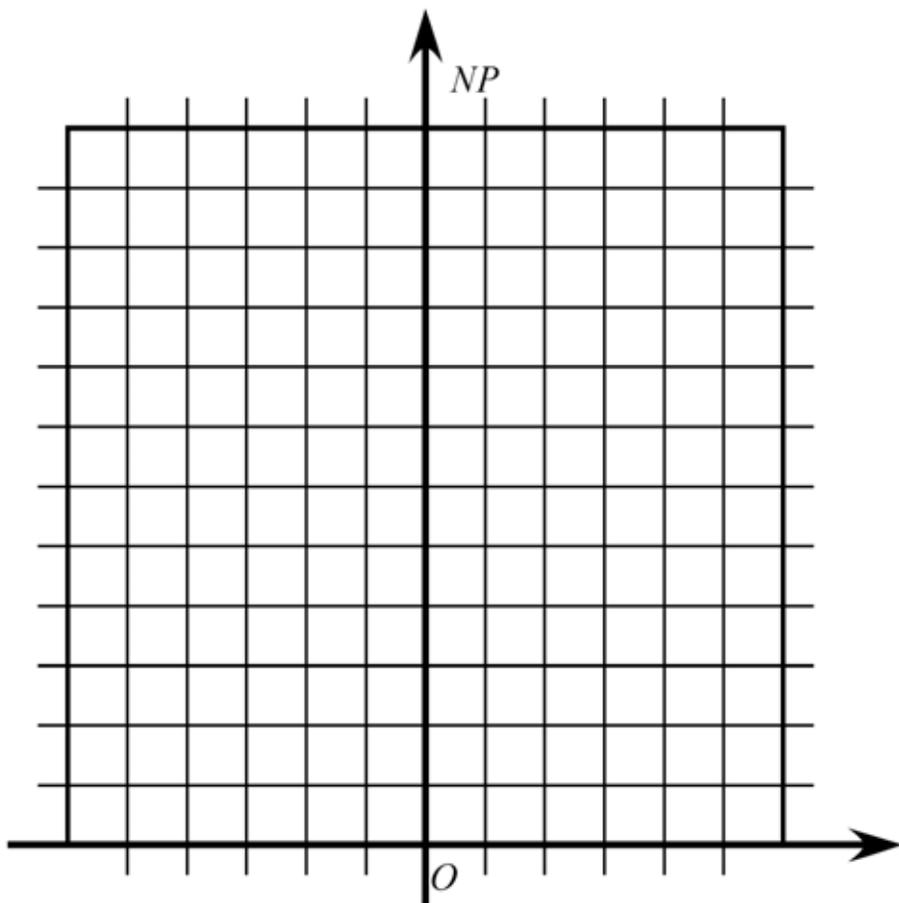
$$P = 2\sqrt{-1} \in \partial D_0$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$

$$N \text{ 倍する : } D_0 \longrightarrow ND_0$$

$$NO = 0$$

$$NP = 2N\sqrt{-1}$$



- 正方形の開領域

$$D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

$$O = 0 \text{ (原点)} \in \partial D_0$$

$$P = 2\sqrt{-1} \in \partial D_0$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$

$$N \text{ 倍する : } D_0 \longrightarrow ND_0$$

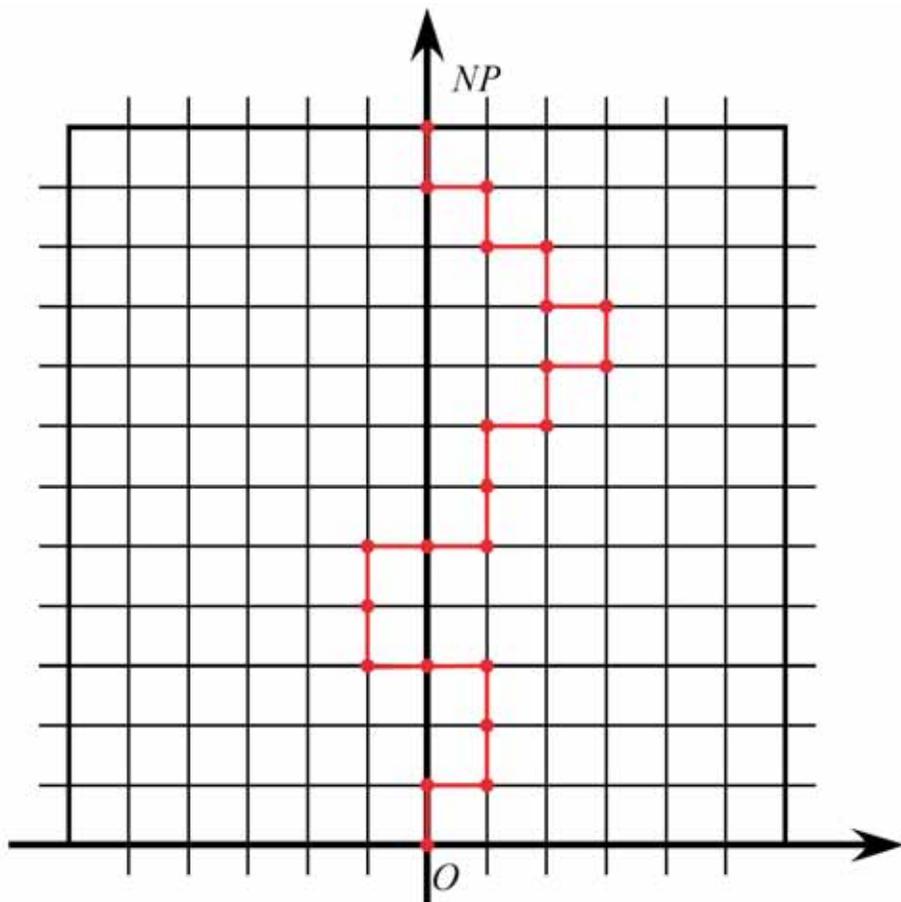
$$NO = 0$$

$$NP = 2N\sqrt{-1}$$

- $\Omega_N(D_0; O, P) \equiv \{\text{RW} : NO \rightsquigarrow NP, \text{道} \subset ND_0\}$

- 分配関数 (=条件付き RW の測度の総和)

$$Z_N(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N(D_0; O, P)} 4^{-|\omega|}$$



- 正方形の開領域

$$D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

$$O = 0 \text{ (原点)} \in \partial D_0$$

$$P = 2\sqrt{-1} \in \partial D_0$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$

$$N \text{ 倍する : } D_0 \longrightarrow ND_0$$

$$NO = 0$$

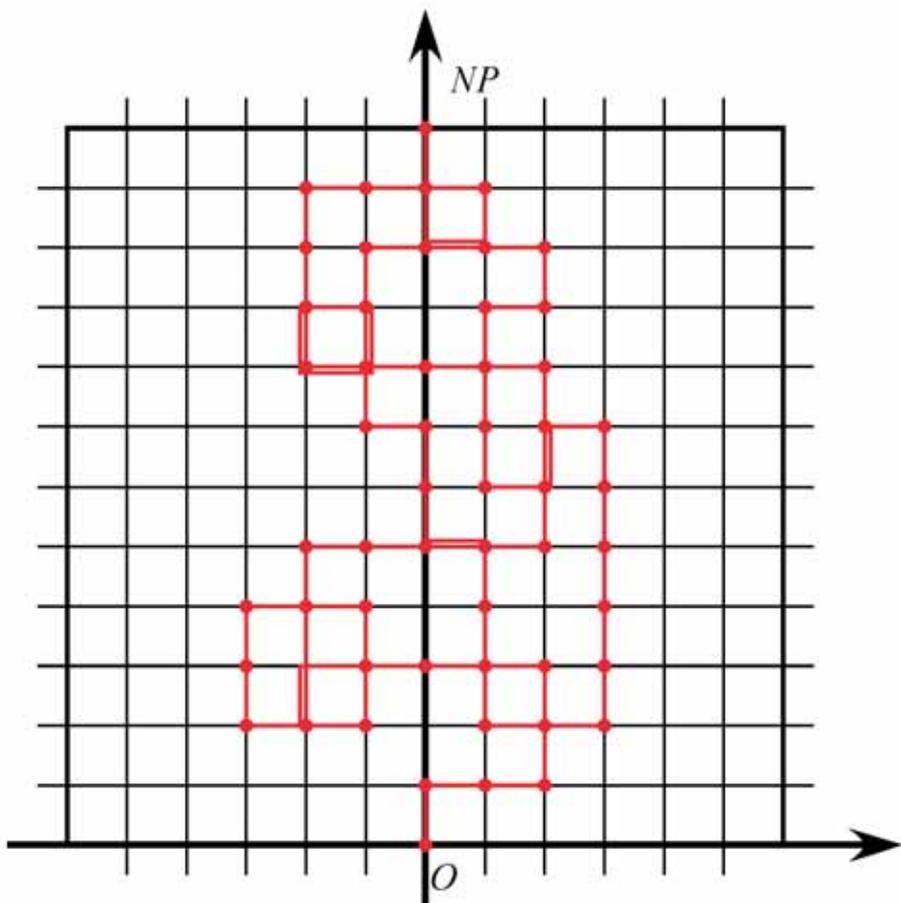
$$NP = 2N\sqrt{-1}$$

- $\Omega_N(D_0; O, P) \equiv \{\text{RW} : NO \rightsquigarrow NP, \text{道} \subset ND_0\}$

- 分配関数 (=条件付き RW の測度の総和)

$$Z_N(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N(D_0; O, P)} 4^{-|\omega|}$$





- 正方形の開領域

$$D_0 = \{x + \sqrt{-1}y : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$$

$$O = 0 \text{ (原点)} \in \partial D_0$$

$$P = 2\sqrt{-1} \in \partial D_0$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, \dots\}$

$$N \text{ 倍する : } D_0 \longrightarrow ND_0$$

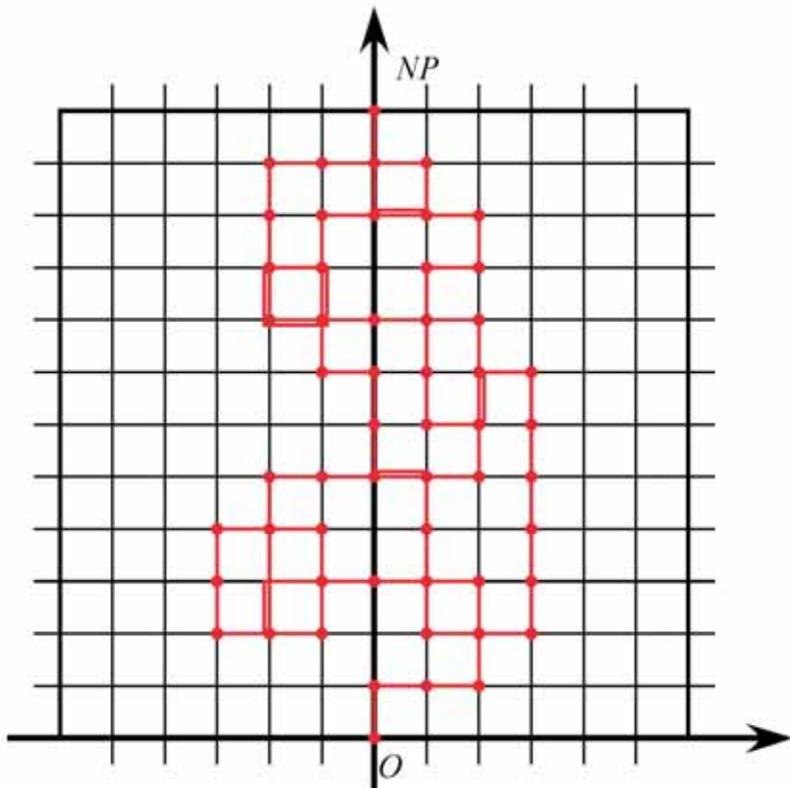
$$NO = 0$$

$$NP = 2N\sqrt{-1}$$

- $\Omega_N(D_0; O, P) \equiv \{\text{RW} : NO \rightsquigarrow NP, \text{道} \subset ND_0\}$

- 分配関数 (=条件付き RW の測度の総和)

$$Z_N(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N(D_0; O, P)} 4^{-|\omega|}$$



ただし

$$f(N) \sim g(N), \quad N \rightarrow \infty$$

$\Updownarrow$

$$\frac{f(N)}{g(N)} \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty$$

$$N \rightarrow \infty$$

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P)N^{-2}$$

ここで

$$G_{D_0}(z, w) = \pi \int_0^\infty p_{D_0}(t, w, z) dt$$

= the Green's function for the complex BM  
stopped at  $\partial D_0$

= the Green's function for the Laplacian  
with Dirichlet boundary condition on  $D_0$

for  $z, w \in D_0$ ,

$$H_{D_0}(z, w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} G_{D_0}(z, w + \varepsilon \mathbf{n})$$

= Poisson kernel, for  $z \in D_0, w \in \partial D_0$ ,

$$\hat{H}_{D_0}(z, w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} H_{D_0}(z + \varepsilon \mathbf{n}_z, w)$$

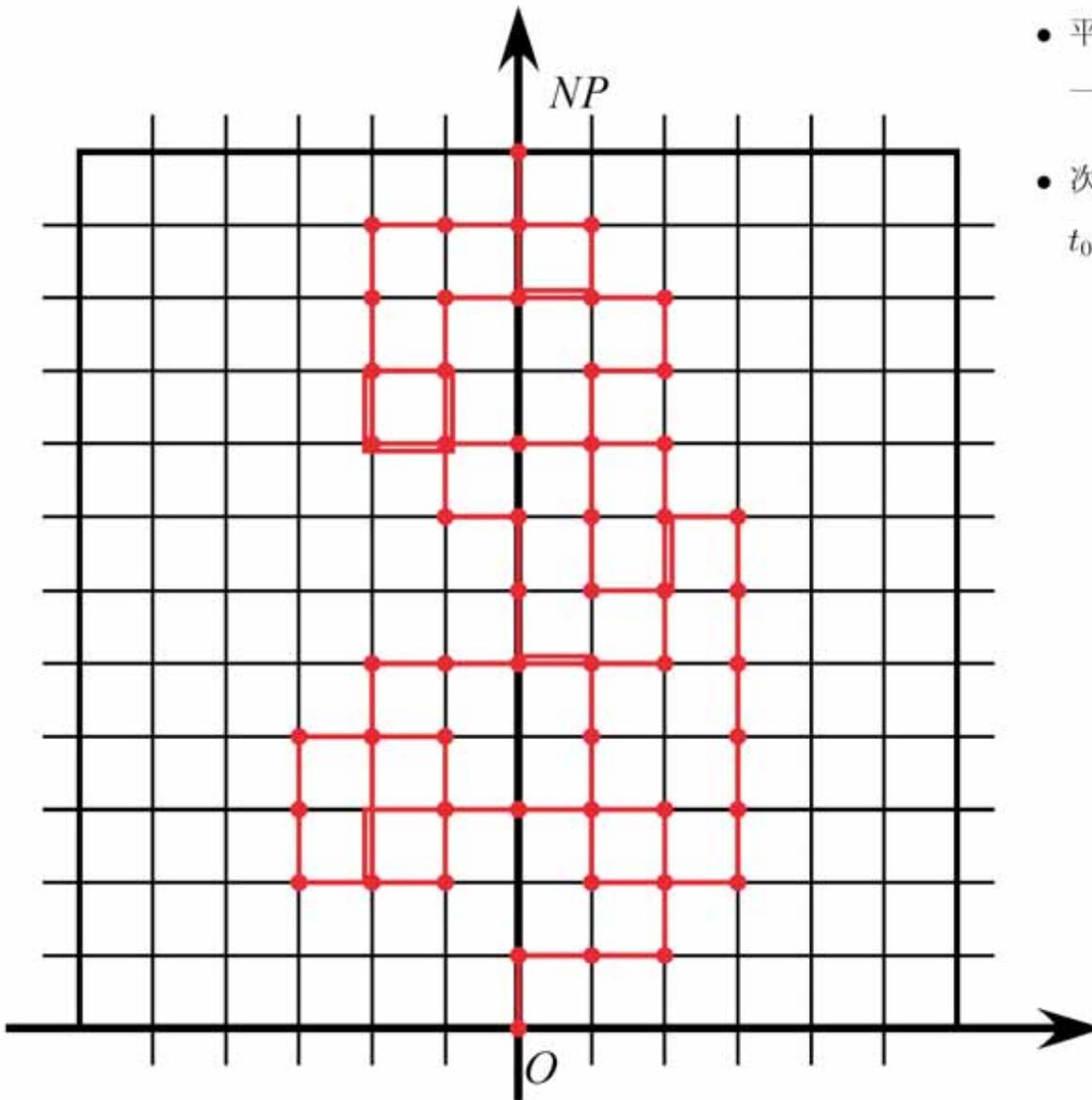
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} G_{D_0}(z + \varepsilon \mathbf{n}_z, w + \varepsilon \mathbf{n}_w)$$

= boundary Poisson kernel, for  $z, w \in \partial D_0$ ,

としたとき,

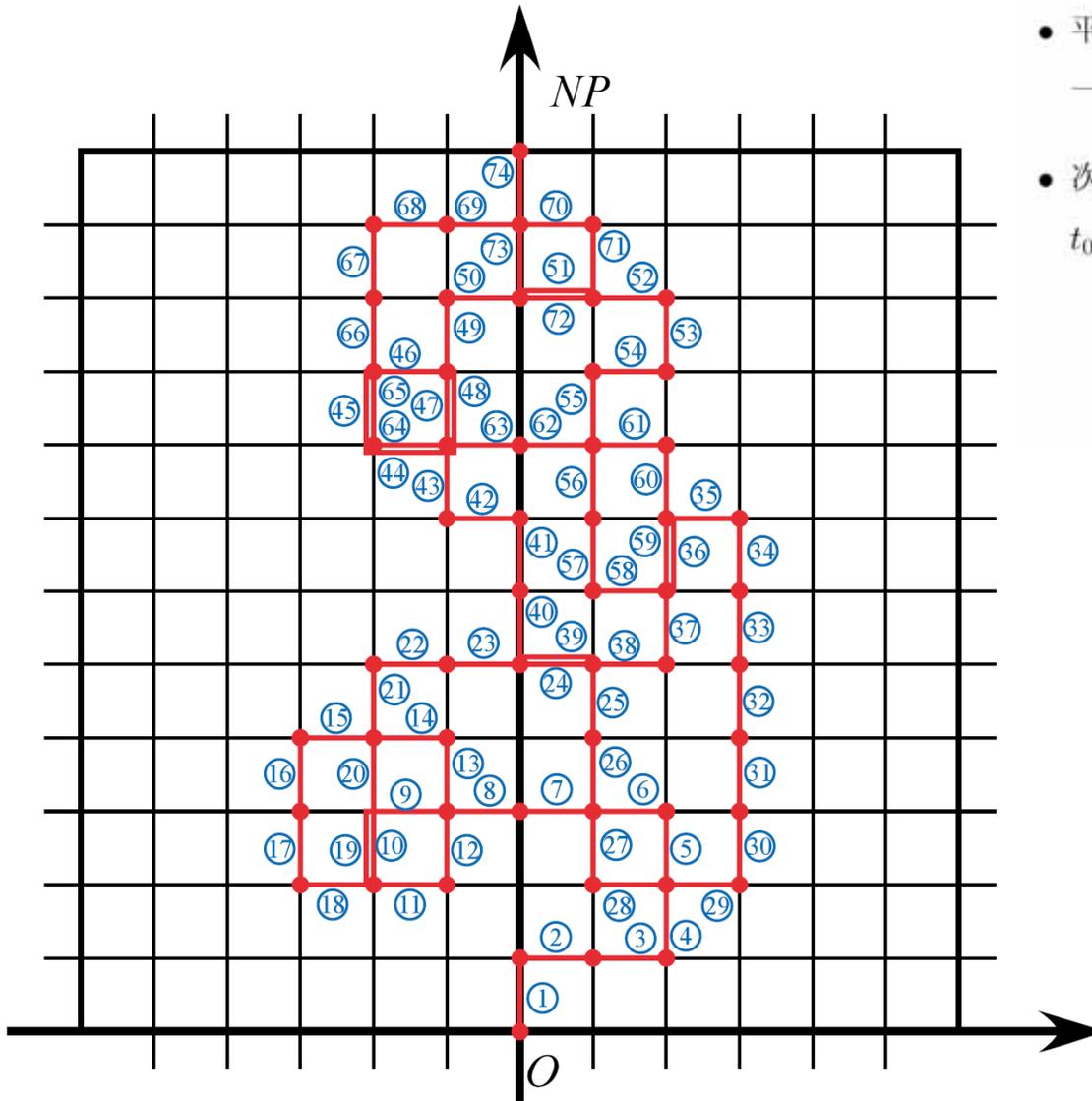
$$C(D_0; O, P) = \hat{H}_{D_0}(O, P).$$

平面上のRW  $\Rightarrow$  連続極限  $\Rightarrow$  複素ブラウン運動(complex BM)



- 平面上の RW の集合  $\Omega_N(D_0; O, P)$  の元  $\omega$  は一般にはループを持つ(自己交差する).
- 次の操作によってループを消去する:  $\omega \rightarrow \hat{\omega}$   
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$  として,  $m \geq 1$  に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\},$$
$$\hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1).$$



- 平面上の RW の集合  $\Omega_N(D_0; O, P)$  の元  $\omega$  は一般にはループを持つ(自己交差する).
- 次の操作によってループを消去する:  $\omega \rightarrow \hat{\omega}$   
 $t_0 = 0, \hat{\omega}(0) = \hat{\omega}(t_0) = 0$  として,  $m \geq 1$  に対して

$$t_m = \max \left\{ \ell > t_{m-1} : \hat{\omega}(\ell) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1) \right\},$$

$$\hat{\omega}(m) = \hat{\omega}(t_m) = \hat{\omega}(t_{m-1} + 1).$$

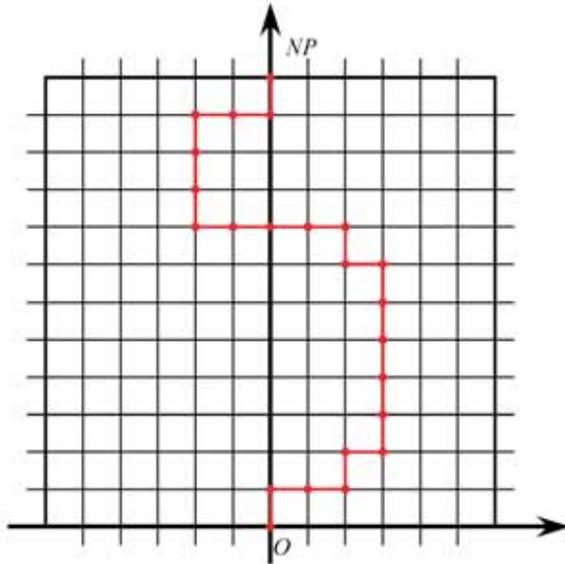








# ループ除去ランダムウォーク(LERW)の連続極限



$\exists \nu > 0,$

$$\omega^{1/N} \left( \frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i), \quad 0 \leq i \leq |\omega|$$

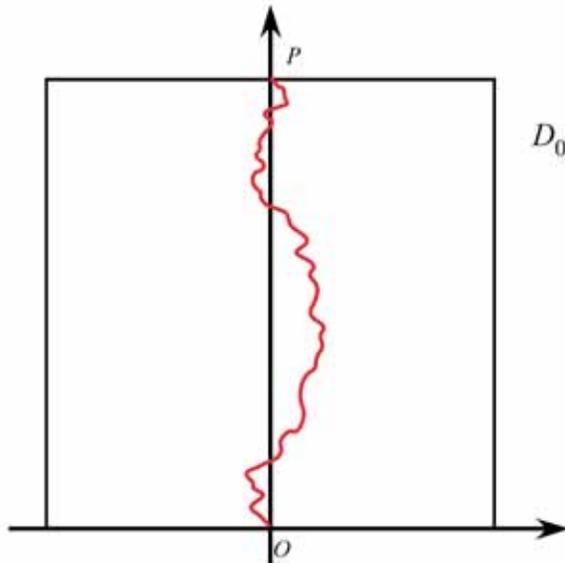
= 原点  $O$  を出発,  $\frac{|\omega|}{N^{1/\nu}}$  ステップ後に  $P = 2\sqrt{-1}$  に到達,

$D_0$  内の (空間刻み  $1/N$  の) ループ無しの道

$\Downarrow \quad N \rightarrow \infty$

$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0$  連続,

$$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty).$$



$D_0$  ただし,  $t_\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} |\omega|/N^{1/\nu}$  :  $P$  への到達時刻 (確率変数)

$\gamma : (0, t_\gamma) \rightarrow D_0$  連続,

$$\lim_{t \downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t \uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty)$$

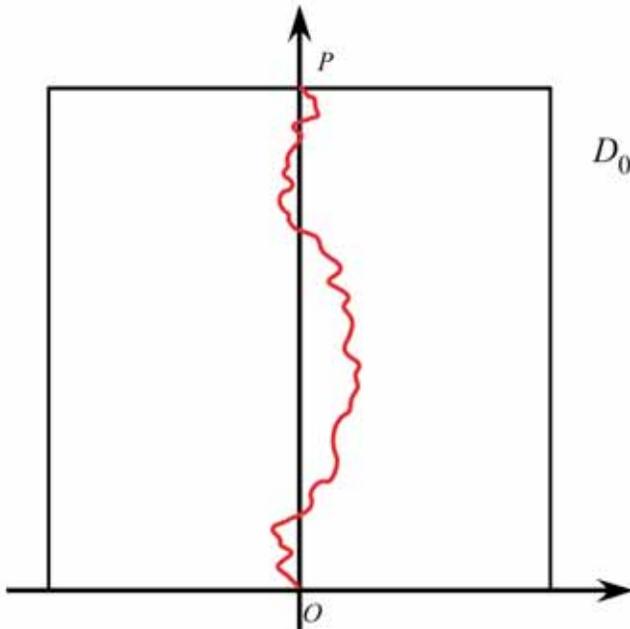
- 曲線  $\gamma$  のフラクタル次元  $d_{\text{LERW}} = \frac{1}{\nu}$
- $\gamma$  は単純曲線:  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2), 0 \leq \forall t_1 < t_2 \leq t_\gamma$ .

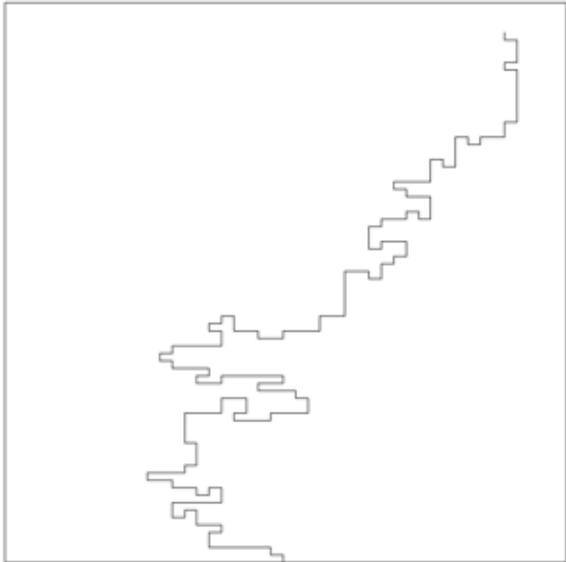
$\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P) \equiv$  LERW の連続極限 (指数  $\nu$  のスケーリング極限) として得られる連続関数  $\gamma$  全体.

$\bar{\mu}_{D_0; O, P}^{\text{LERW}}(\cdot) \equiv$  関数空間  $\mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P)$  に対する測度

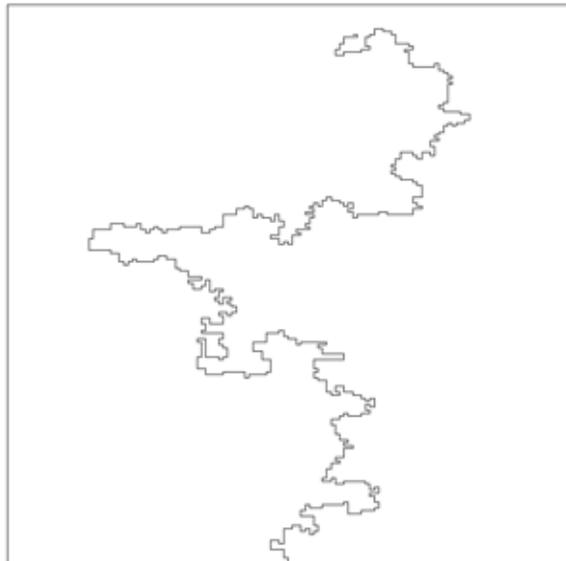
- 総和は (ループ除去前の RW の極限と同じく)  $C(D_0; O, P)$  なので,

$$\begin{aligned} \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot) &= \frac{\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}(\cdot)}{C(D_0; O, P)} \\ &= \mathcal{K}_{\text{LERW}}(D_0; O, P) \text{ に台をもつ確率測度} \end{aligned}$$





(a1)



(a2)

- $W_n^z = \{RW : \text{出発点} = z, \text{長さ} = n\}$   
の部分集合 (ループ無しの RW)

$$W_{n,0}^z \equiv \{\omega \in W_n^z, : \omega(i) \neq \omega(j), 0 \leq \forall i < j \leq n\}.$$

- $\exists \beta > 0$  s.t.

$$|W_{n,0}^z| \simeq e^{\beta n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

ただし,  $f(n) \simeq g(n), n \rightarrow \infty$

$$\iff \log f(n) \sim \log g(n), n \rightarrow \infty$$

自己回避ウォーク (self-avoiding walk: SAW)

≡ 自己交差しない (ループ無し) ウォーク  $\omega$  に対して  
それぞれ  $e^{-\beta|\omega|}$  の測度を与えた統計集団.

左図(a1)は  $n=200$  ステップ, (a2) は  $n=800$  ステップ

## SAW の分配関数

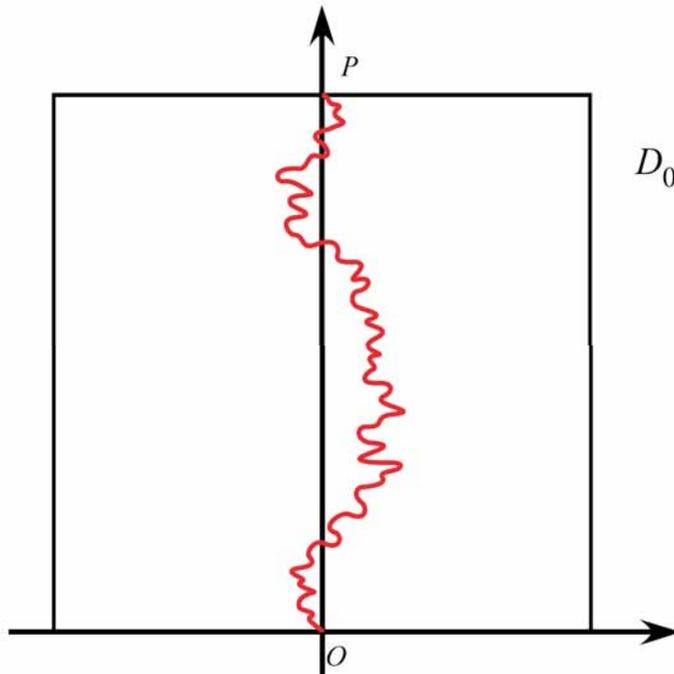
$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) = \sum_{\omega \in \Omega_N^0(D_0; O, P)} e^{-\beta|\omega|}$$

- $\exists b_{\text{SAW}} > 0$ , s.t.

$$Z_N^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \sim C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) N^{-2b_{\text{SAW}}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

- $\exists \nu = 1/d_{\text{SAW}}$ , s.t.

$$\omega^{1/N} \left( \frac{i}{N^{1/\nu}} \right) = \frac{1}{N} \omega(i) \implies \gamma(t), \quad N \rightarrow \infty.$$



## SAW の連続極限に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot) = C^{\text{SAW}}(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{SAW}}(\cdot)$$

## 比較

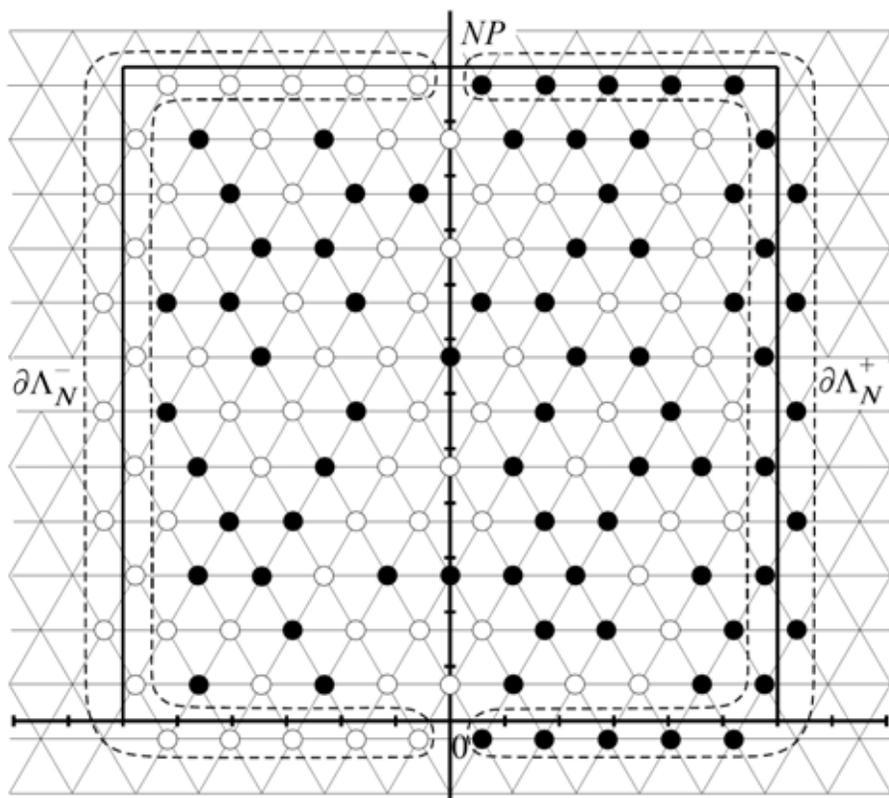
- RW と LERW では

$$Z_N(D_0; O, P) \sim C(D_0; O, P) N^{-2}, \quad N \rightarrow \infty.$$

つまり,  $b_{\text{RW}} = b_{\text{LERW}} = 1$ .

- $d_{\text{LERW}} \neq d_{\text{SAW}}$

# 臨界浸透模型 (critical percolation model)



- ここでは  $\mathbb{C}$  上に三角格子を置く：

$$\tau = \exp(2\pi\sqrt{-1}/3) \text{ として}$$

$$\mathbf{T} = \{z_0 + (i + j\tau)\sqrt{3}a : i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

ただし,  $a = \frac{2}{3}$  として  $z_0 = a\sqrt{-1}$  とする.

- 確率変数  $\eta(z) \in \{0, 1\}$ ,  $z \in \mathbf{T}$   
Bernoulli 測度  $\nu_p$  で分布：

$$\nu_p(\eta(z) = 1) = p, \quad \nu_p(\eta(z) = 0) = 1 - p.$$

- 三角格子  $\mathbf{T} \iff$  繊維表面  
 $\eta(z) = 1 \iff$  濡れた部位  
 $\eta(z) = 0 \iff$  乾いた部位

## 浸透現象の模型

- 浸透相転移 (percolation transition)

$p \leq \frac{1}{2}$  : ある 1 点を含む連結浸透領域は  
確率 1 で有界

$p > \frac{1}{2}$  :  $\text{Prob}(\text{非有界}) > 0$

$p = p_c = \frac{1}{2}$  : 臨界値

以下  $p = p_c = \frac{1}{2}$  とする.

- $N \in \mathbb{N}, \mathbf{T} \cap ND_0 = \Lambda_N$

(左図は  $N = 6$  の場合)

- Dobrushin 境界条件

$$\eta(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+$$

$$\eta(z) = 0, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^-$$

- これ以外の領域  $\Lambda_N$  内部の配置:

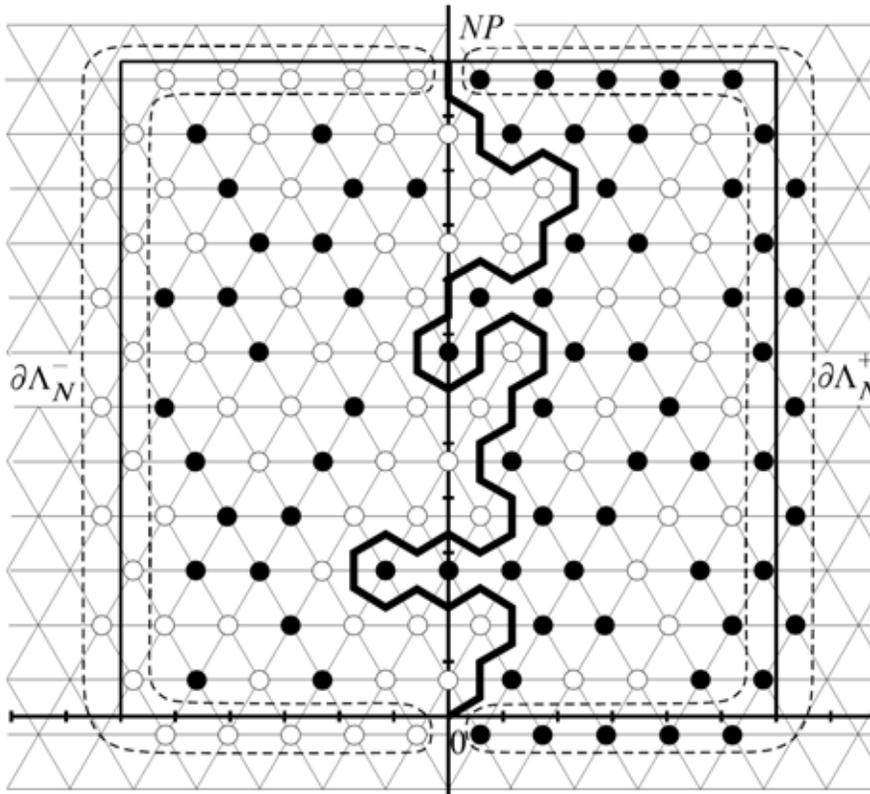
$\nu_{1/2}$  に従ってランダムに分布

- 浸透探索過程

(percolation exploration process)

$\omega$ : 道の進行方向すぐ左側は 0 (白丸)

道の進行方向すぐ右側は 1 (黒丸)



# 浸透探索過程の連続極限

浸透探索過程  $\omega$

$N \rightarrow \infty \quad \downarrow \quad$  スケーリング極限 (指数  $\nu = 1/d_{\text{per}}$ )

$\gamma$ : 連続曲線

これは単純曲線ではない.

- Bernoulli 測度なので

測度の総和 (分配関数)  $Z_N^{\text{per}}(D_0; O, P) \equiv 1$

よって  $N^{-2b_{\text{per}}} = 1 \iff b_{\text{per}} = 0$

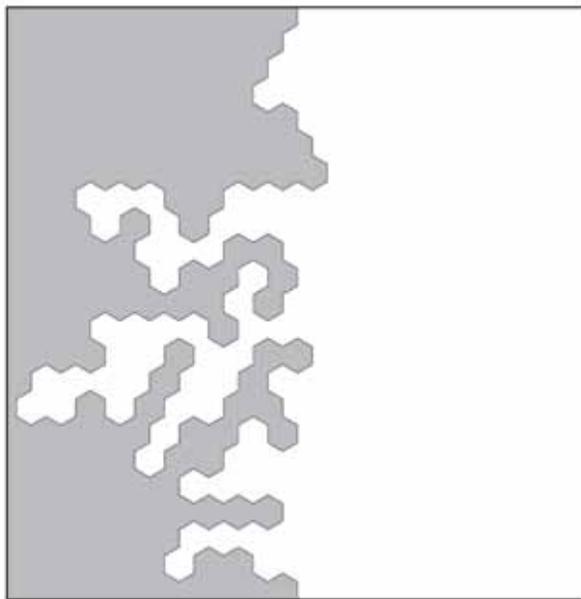
- 浸透探索過程の連続極限  $\gamma$

に対する確率測度を

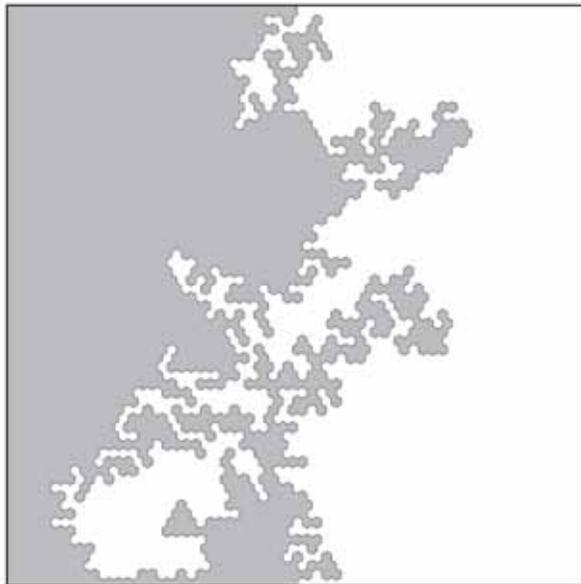
$\mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\cdot)$  と記す.

左図 (b1) は  $35 \times 35$  三角格子上,

(b2) は  $100 \times 100$  三角格子上

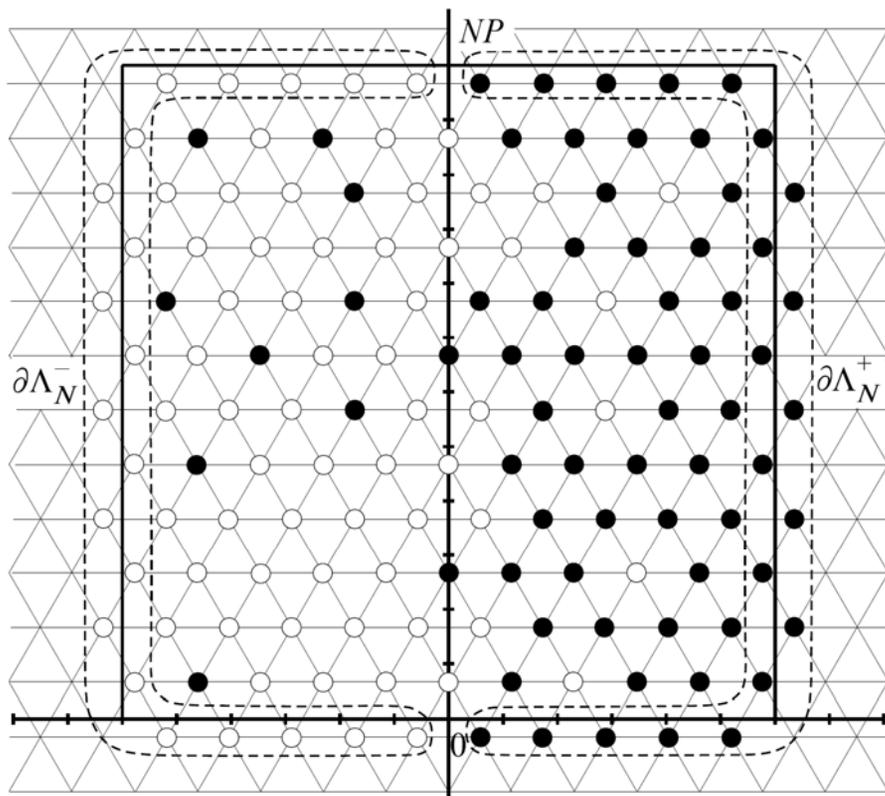


(b1)



(b2)

# 臨界 Ising 模型 (critical Ising model)



- $\bar{\Lambda}_N = \Lambda_N \cup \partial\Lambda_N^+ \cup \partial\Lambda_N^-$

- 確率変数 (スピン)

$$\sigma(z) \in \{-1, 1\}, \quad z \in \bar{\Lambda}_N$$

- Dobrushin 境界条件

$$\sigma(z) = 1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^+$$

$$\sigma(z) = -1, \quad \forall z \in \partial\Lambda_N^-$$

- 領域内部  $\Lambda_N^0$  のスピンは

径数  $\beta > 0$  の Gibbs 測度でランダムに配置:

$$\pi_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta E(\sigma)}}{Z_{N,\beta}}$$

ただし,

$$E(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{z,z' \in \bar{\Lambda}_N: |z-z'|=\sqrt{3}a} \sigma(z)\sigma(z')$$

$$Z_{N,\beta} = \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^{\Lambda_N^0}} e^{-\beta E(\sigma)}$$

- 磁気相転移 (magnetic phase transition)

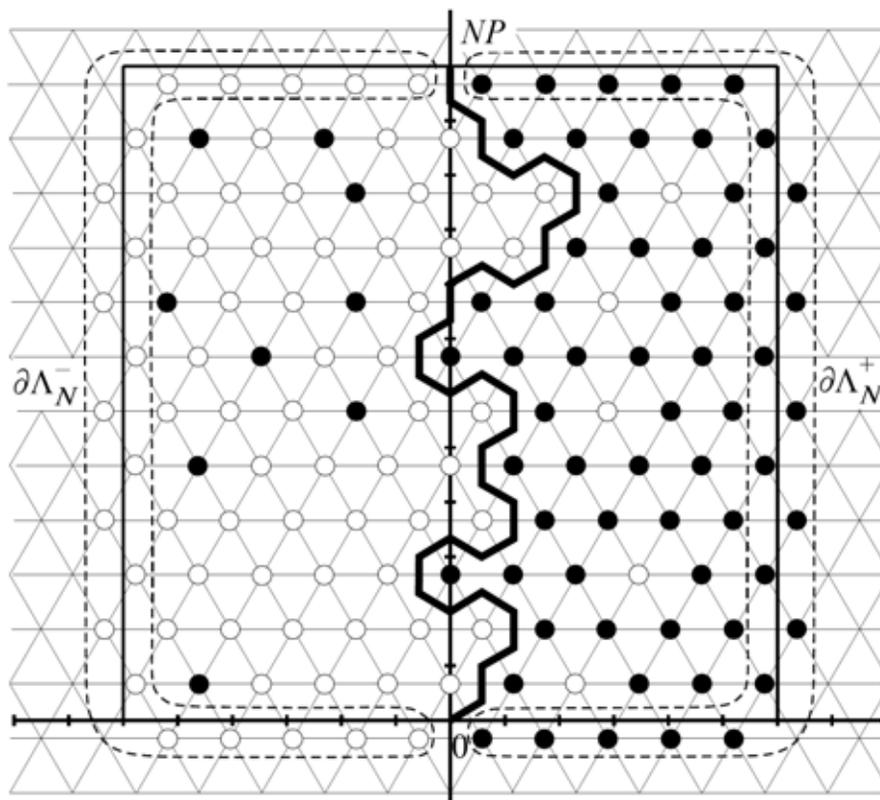
$\beta = J/kT < \beta_c$  ( $T > T_c$ ): 常磁性相

$\beta = J/kT > \beta_c$  ( $T < T_c$ ): 強磁性相

$\beta = J/kT = \beta_c$  ( $T = T_c$ ): 臨界点 (Curie 温度)

$$e^{-2\beta_c} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \beta_c = \frac{1}{4} \log 3 = 0.27465 \dots$$

# Ising 界面(Ising Interface)



以下  $\beta = \beta_c$  ( $T = T_c$ ) とする.

- $\omega$  : Ising 界面 (Ising interface)

$N \rightarrow \infty$   $\downarrow$  スケーリング極限

(指数  $\nu = 1/d_{\text{Ising}}$ )

$\gamma$  : 連続曲線

これは単純曲線.

- Ising 界面の連続極限  $\gamma$

に対する測度を

$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{Ising}}(\cdot)$  と記す.