臨界現象・フラクタル曲線と
Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部　香取眞理 (かとりまこと)

Section 1.B

Summer School 数理物理２００９ 「ベキ乗則の数理」

２００９年8月27－30日

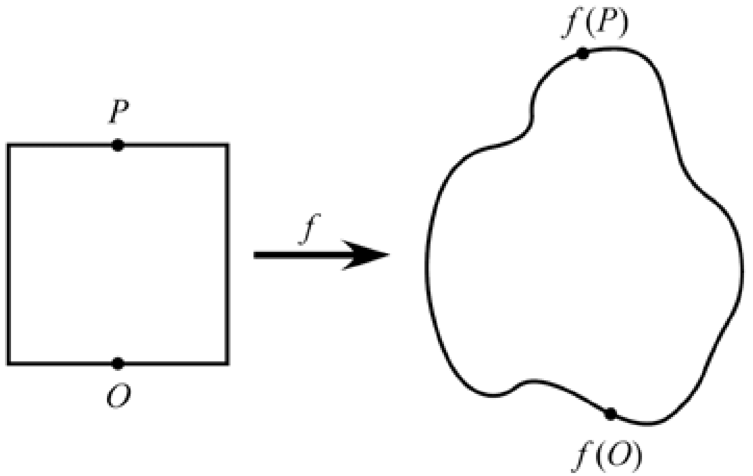
東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

1.2 共形不変性と領域 Markov 性

$f: D_0 \subset \mathbb{C}$ 上で正則, $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$ のとき

$$f : D_0 \quad \to \quad f(D_0) : \quad \text{共形変換（等角写像）}$$

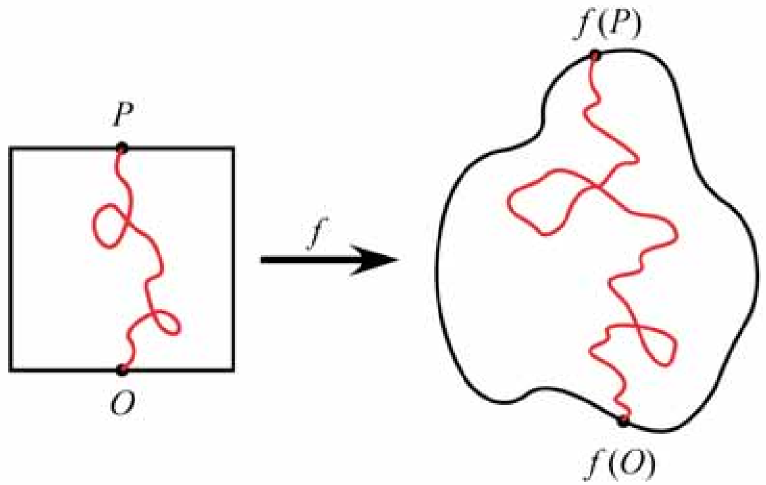
ただし，$\partial D_0 \to f(\partial D_0), O \to f(O), P \to f(P)$ とする.



1.1 節で述べた平面格子上の統計力学模型の連続極限に伴って得られる連続関数 γ に対する測度

$$\overline{\mu}_{(D_0;O,P)}(\,\cdot\,) = C(D_0;O,P)\mu_{(D_0;O,P)}(\,\cdot\,)$$

の共形変換 f による変換性を考える.



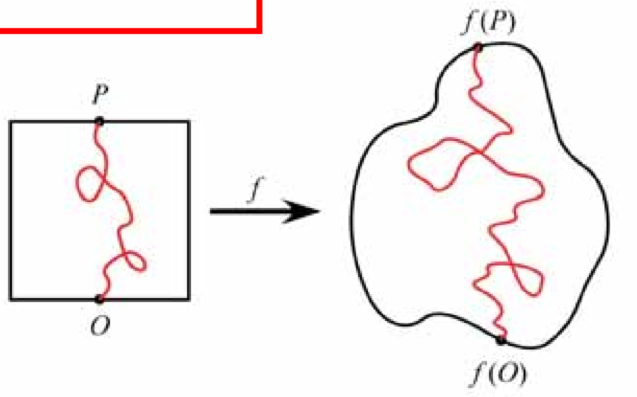
次の2つの変換性を持つことが期待される.

① 共形共変性と共形不変性

任意の共形変換に対して,

$$f \circ \overline{\mu}_{(D_0;O,P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \overline{\mu}_{(f(D_0);f(O),f(P))}(\cdot)$$

指数 b = 1.1 節の格子上の模型の分配関数の
領域サイズ $N \to \infty$ に伴う漸近挙動で決まる値
= (上の式の形から) **境界スケーリング指数**
(boundary scaling exponent) と呼ばれる



上式は測度の総和 (分配関数) の**共形共変性**と
確率測度の**共形不変性**を意味する：

$$C(D_0;O,P) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b C(f(D_0);f(O),f(P)),$$
$$\mu_{(D_0;O,P)}(\cdot) = \mu_{(f(D_0);f(O),f(P))}(\cdot).$$

1.1 節の

$$Z_N(D_0;O,P) \sim C(D_0;O,P)N^{-2}, \quad N \to \infty$$

や

$$Z_N^{\mathrm{SAW}}(D_0;O,P) \sim C^{\mathrm{SAW}}(D_0;O,P)N^{-2b_{\mathrm{SAW}}}, \quad N \to \infty$$

は，格子上の大きな領域 ND_0 内での道の測度を，$1/N$ に縮小した単位領域 D_0 内での道の測度に変換したときの変換性を示したものと見なせる．縮小変換 f も共形変換であり，$f'(z) \equiv 1/N$ である．これより，

$$f \circ \overline{\mu}_{(D_0;O,P)}(\,\cdot\,) = |f'(O)|^b|f'(P)|^b\overline{\mu}_{(f(D_0);f(O),f(P))}(\,\cdot\,)$$

に現れる境界スケーリング指数 b は，1.1 節の $N \to \infty$ に伴う分配関数の減衰を表す指数 b と同一視できる．

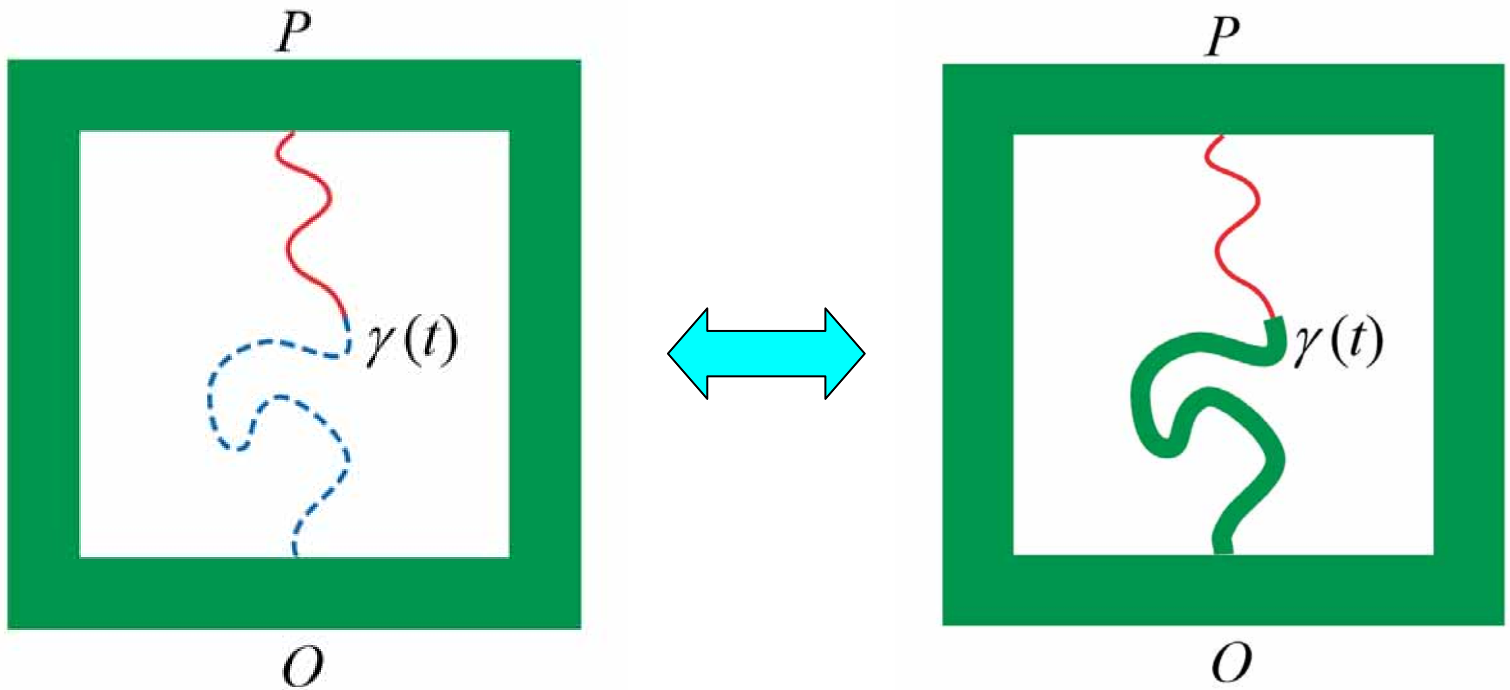
② 領域 Markov 性

$\mu_{(D_0;O,P)}$ の下で，曲線 γ の初期の一部分 $\gamma(0,t], t \in (0,t_\gamma)$ を観測する．

この条件の下での曲線の残りの部分の分布は，D_0 から $\gamma(0,t]$ を除いた開領域で，$\gamma(t)$ を出発点として $\gamma(t_\gamma) = P$ を終点とする曲線の分布に等しい：

$$\mu_{(D_0;O,P)}\Big(\cdot \Big| \gamma(0,t] \Big) = \mu_{(D_0 \setminus \gamma(0,t];\gamma(t),P)}(\,\cdot\,).$$

この性質を**領域 Markov 性**と言う．



注：曲線の径数付けについて

$$\gamma : (0, t_\gamma) \to D_0 \quad \text{連続},$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \gamma(t) = O, \quad \lim_{t\uparrow t_\gamma} \gamma(t) = P, \quad t_\gamma \in (0, \infty)$$

曲線 γ は変数 $t \in [0, t_\gamma]$ (**時間**と見なす) の連続関数.

共形変換によって，時間はどのように変換（時間変更）されるべきか.

- ウォーク ω のスケーリング性

$$\omega^{1/N}\left(\frac{i}{N^{1/\nu}}\right) = \frac{1}{N}\omega(i), \quad 0 \le i \le |\omega|$$

$$\Downarrow$$

像曲線 $f \circ \gamma$ 上の

区間 $f(\gamma[t_1, t_2]), 0 < t_1 < t_2 < t_\gamma$, の移動時間

$$= \int_{t_1}^{t_2} |f'(\gamma(s))|^d ds,$$

(d は曲線 γ のフラクタル次元.)

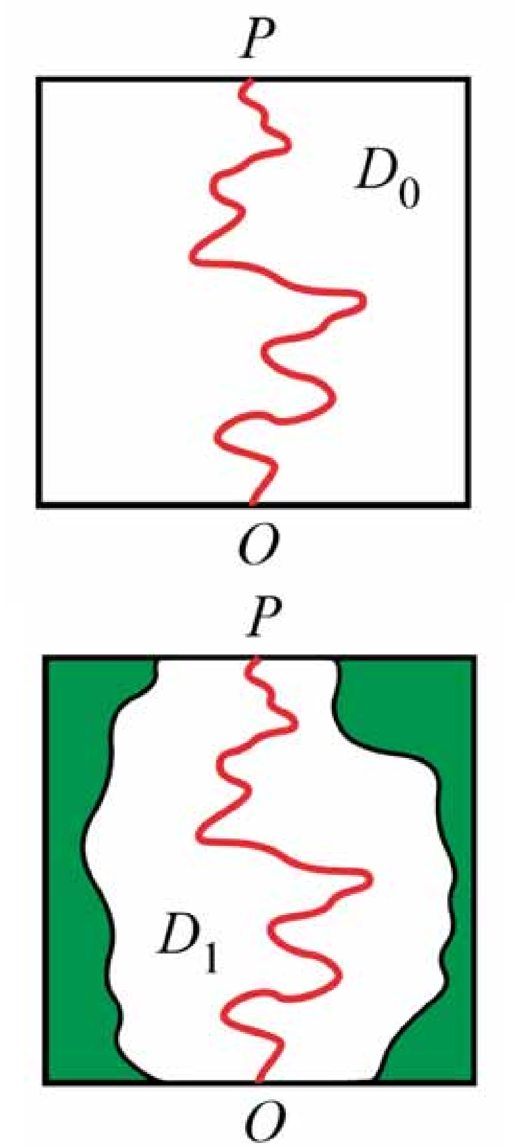
- 曲線の径数付けの違い（時間変更の違い）を無視して考えることもある.

$$\gamma(t) = \gamma(\theta(t)) :$$

$$\forall \text{増加同相写像} : \theta : [0, t_\gamma] \to [0, t_\gamma]$$

1.3 制限性と局所性

制限性 (restriction property)



D_1 : 単連結領域, $D_1 \subset D_0$. ただし, $O, P \in \partial D_1$.

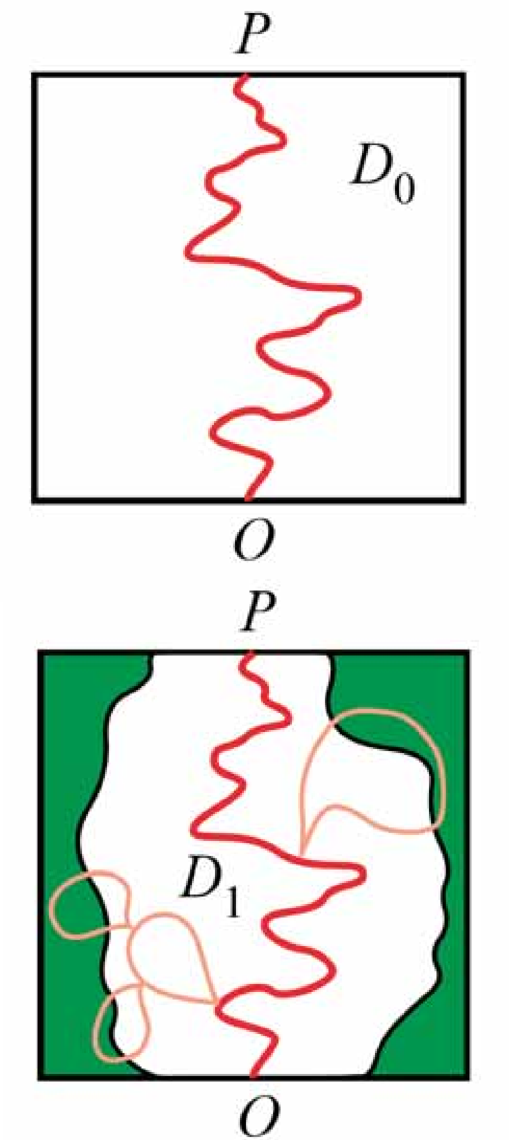
- 部分領域 D_1 で LERW を考える.

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\overline{\mu}^{\mathrm{LERW}}_{(D_1;O,P)}}{d\overline{\mu}^{\mathrm{LERW}}_{(D_0;O,P)}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$

1.3 制限性と局所性

制限性 (restriction property)



D_1 : 単連結領域, $D_1 \subset D_0$. ただし, $O, P \in \partial D_1$.

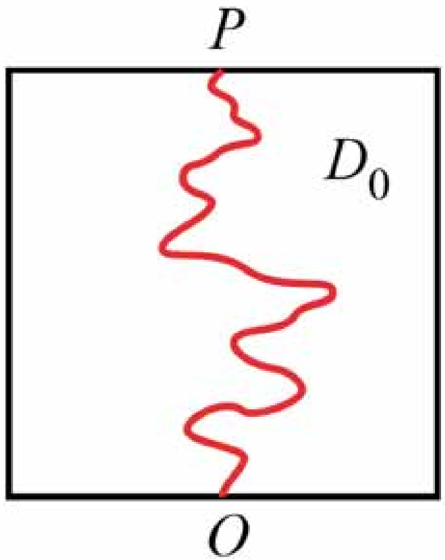
- 部分領域 D_1 で LERW を考える.

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\overline{\mu}^{\mathrm{LERW}}_{(D_1;O,P)}}{d\overline{\mu}^{\mathrm{LERW}}_{(D_0;O,P)}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$

1.3 制限性と局所性

③ 制限性 (restriction property)

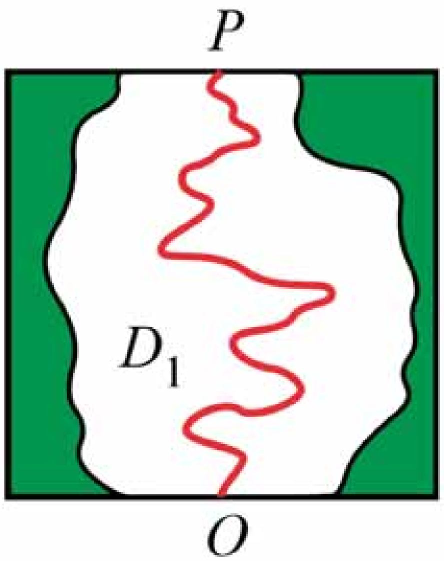


D_1 : 単連結領域, $D_1 \subset D_0$. ただし, $O, P \in \partial D_1$.

- 部分領域 D_1 で LERW を考える.

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\overline{\mu}^{\mathrm{LERW}}_{(D_1;O,P)}}{d\overline{\mu}^{\mathrm{LERW}}_{(D_0;O,P)}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$

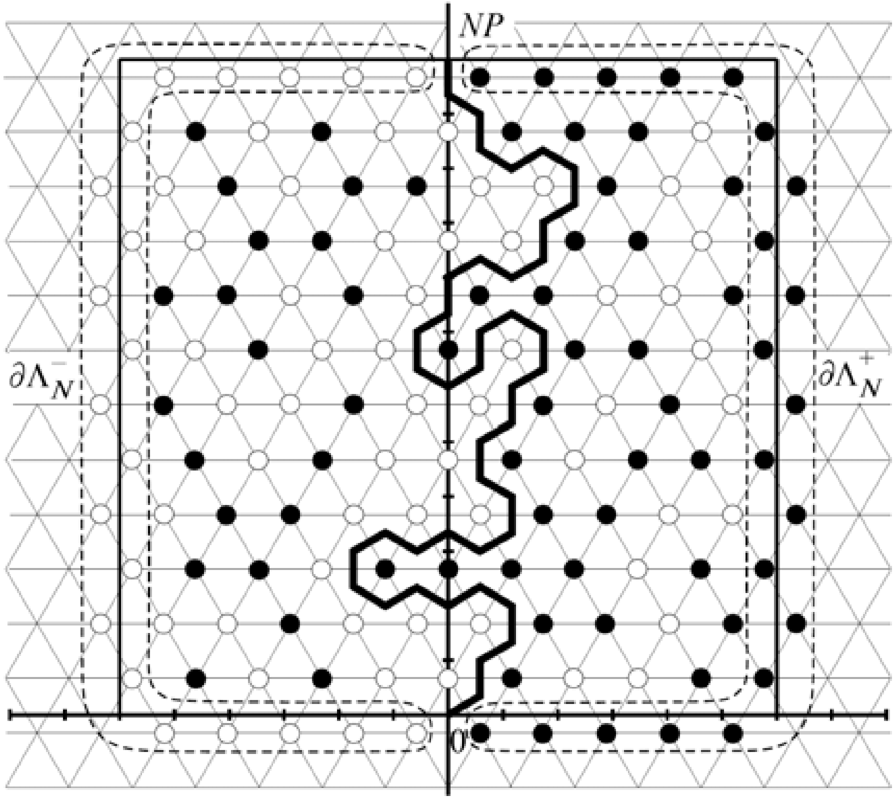


- しかし, SAW の連続極限の測度においては

$$\frac{d\overline{\mu}^{\mathrm{SAW}}_{(D_1;O,P)}}{d\overline{\mu}^{\mathrm{SAW}}_{(D_0;O,P)}} = \mathbf{1}\{\gamma(0, t_\gamma) \subset D_1\}, \quad D_1 \subset D_0$$

が成立する. これを**制限性**という.

④ 局所性(locality property)



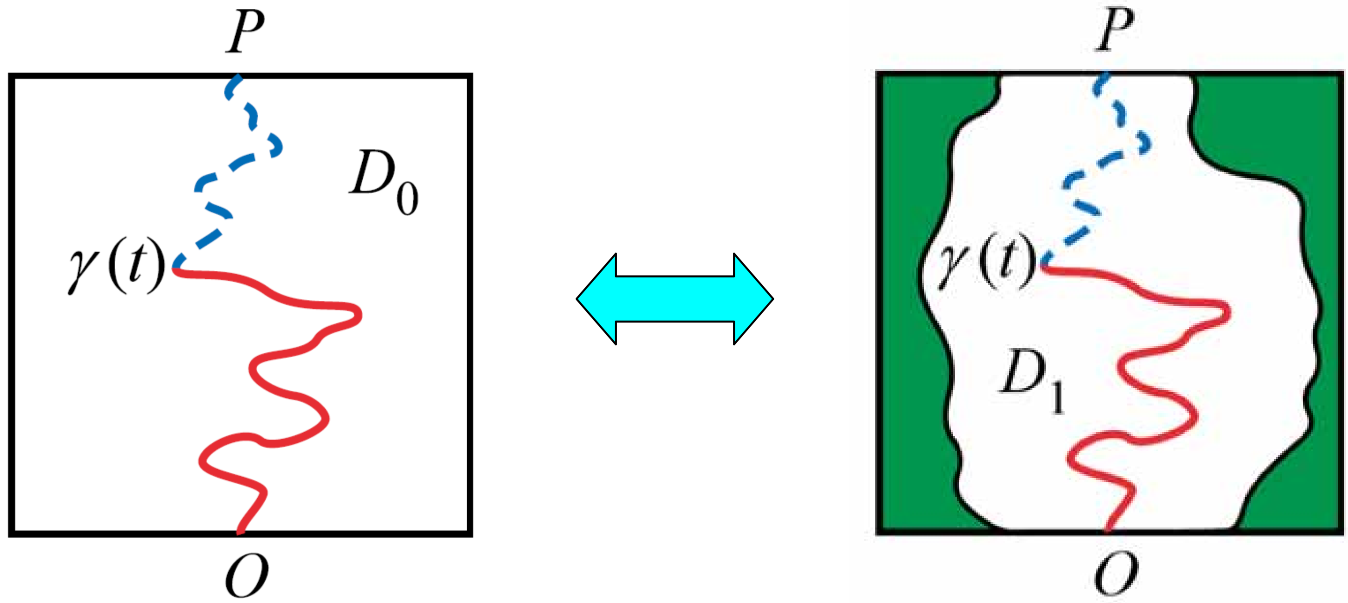
浸透探索過程 ω

Bernoulli 測度 ν_p $\Longrightarrow$ 局所性

④ 局所性(locality property)

D_1 : 単連結領域, $D_1 \subset D_0$, $\quad O, P \in \partial D_1$.

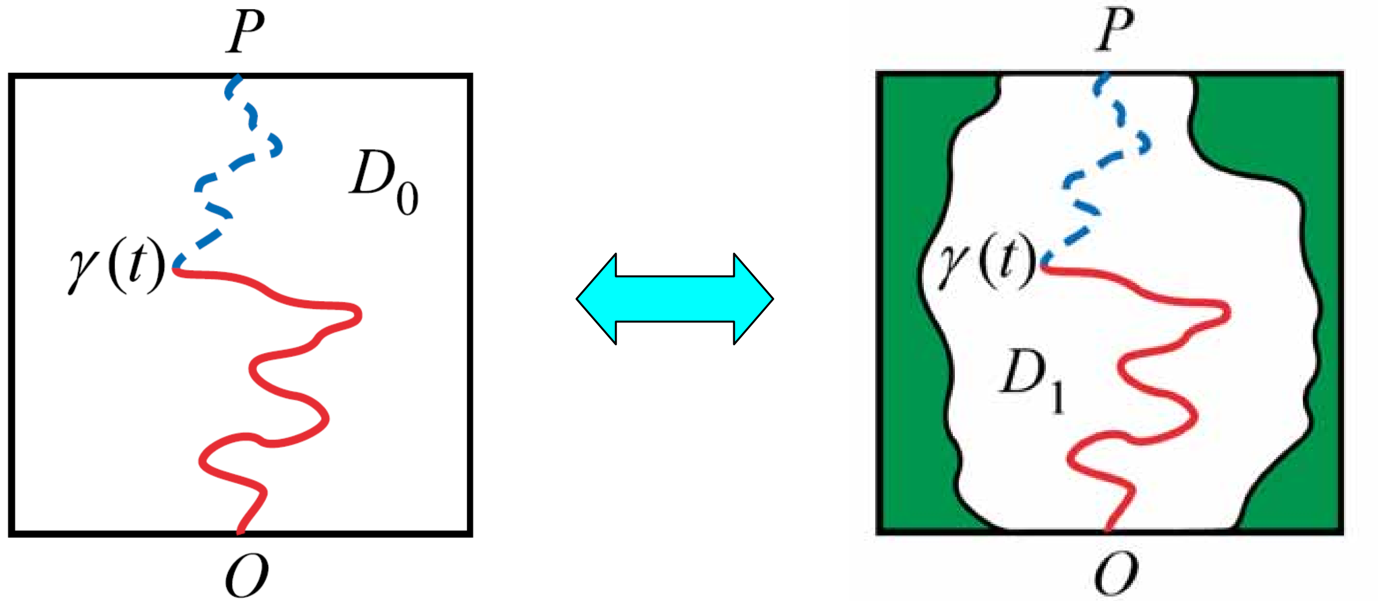
$$\mu^{\mathrm{per}}_{(D_1;O,P)}(\gamma(0,t]) = \mu^{\mathrm{per}}_{(D_0;O,P)}(\gamma(0,t])\mathbf{1}\{\gamma(0,t] \subset D_1\}, \quad \forall t \in (0, t_\gamma).$$



④ 局所性(locality property)

D_1 : 単連結領域, $D_1 \subset D_0$, $O, P \in \partial D_1$.

$$\mu^{\mathrm{per}}_{(D_1;O,P)}(\gamma(0,t]) = \mu^{\mathrm{per}}_{(D_0;O,P)}(\gamma(0,t])\mathbf{1}\{\gamma(0,t] \subset D_1\}, \quad \forall t \in (0,t_\gamma).$$



- Ising 界面の連続極限の測度 $\overline{\mu}^{\mathrm{Ising}}$ には局所性は期待できない.
- **制限性**は曲線全体 $\gamma(0,t_\gamma)$ の性質であるが, **局所性**は任意の初期部分 $\gamma(0,t], t \in (0,t_\gamma)$ に対して成り立つべき性質であり, より強い**独立性**である.