臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部　香取眞理 (かとりまこと)

Section 2.A

Summer School 数理物理２００９ 「ベキ乗則の数理」

２００９年８月２７－３０日

東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

2 確率解析とベッセル過程

2.1 ブラウン運動, マルチンゲール, 伊藤の公式

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を**確率空間**とする．ここで Ω は標本空間，Ω の部分集合 $A \subset \Omega$ は事象を表すが，$\mathcal{F}$ はこの事象の全体であり，σ-加法族をなす．(すなわち，(i) $\Omega \in \mathcal{F}$, (ii) $A \in \mathcal{F}$ なら A の補集合 $A^c \in \mathcal{F}$, (iii) $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ なら $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$, という 3 条件を満たす.) また $\mathbb{P}$ は確率分布関数 (確率法則) を表す．Ω 上に定義される実数値関数 f が $\mathcal{F}$-可測とは，任意の実数 a に対して，$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ であることを言う．

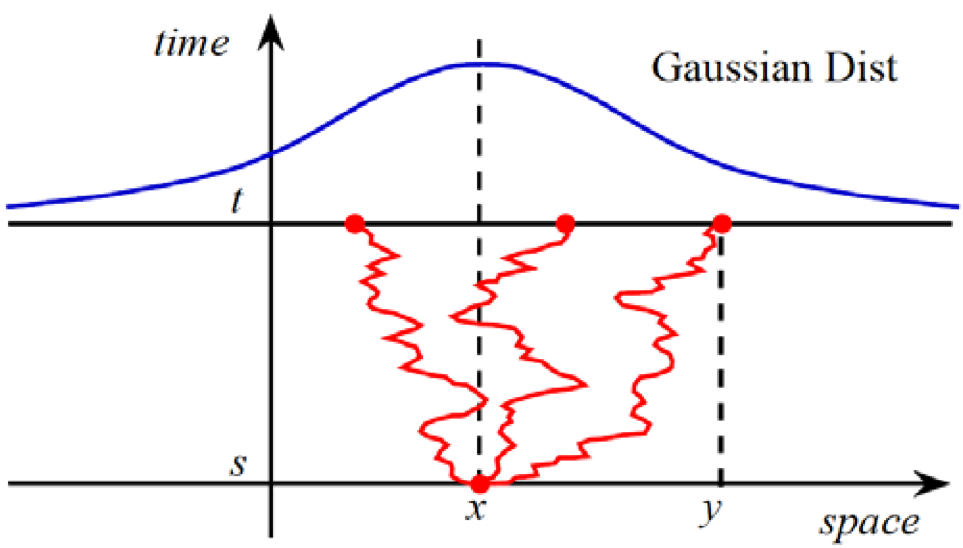
- 確率過程は確率変数の時間発展である．過去の軌跡を「情報」と見るとき，情報の増大系が得られることになる．これを表すのが**フィルトレーション (filtration, 情報系)** $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ である．これは, (i) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, 0 \leq s < t$, (ii) 各 t に対して $\mathcal{F}_t$ は σ 加法族をなす，という 2 条件を満たすものである．$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ をフィルター付き確率空間と言う．

- 1 次元標準 $\mathcal{F}_t$-**ブラウン運動 (Brownian motion)** とは，次を満たす確率過程 B_t である．(以下，特に断りのないときには，これを単にブラウン運動とよび, BM と略記することにする.)

  (i) 各 $0 < s < t$ に対して，$B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_t$-可測であり，$\mathcal{F}_s$ と独立である．その分布は，平均 0, 分散 $t-s$ の正規分布である；

$$\mathbb{P}\Big(B_t - B_s \in [a,b]\Big) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\} dx. \tag{2.1}$$

  (ii) 確率 1 で，$t \mapsto B_t$ は連続．すなわち，
  $^\exists \widetilde{\Omega} \subset \Omega$ s.t. $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ かつ, $\omega \in \widetilde{\Omega}$ のとき $B_t(\omega)$ は t の連続関数.



- (i) の性質から，任意の $c > 0$ に対して，$\dfrac{1}{c}B_{c^2t}$ の分布と B_t の分布は等しいことが分かる．これを

$$\frac{1}{c}B_{c^2t} \overset{\mathrm{d}}{=} B_t \quad {}^{\forall}c > 0 \tag{2.2}$$

と書くことにする．(d は distribution の意味.) これを，**BM のスケーリング性 (scaling property)** と言う．

- $B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d$ が独立な BM であるとき，$\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d)$ を d **次元 BM** と言う．

- B_t^1 と B_t^2 が独立な BM であるとき $\mathcal{B}_t = B_t^1 + \sqrt{-1}B_t^2$ を **(標準) 複素 BM** と言う．

注 2.1. 特に断りのないときは，$\mathbb{P}(\boldsymbol{B}_0 = 0) = 1$, つまり，($d$ 次元)BM は原点からスタートするものとする．一般化して，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d$ (あるいは $z \in \mathbb{C}$) に対して，$\boldsymbol{z}$ からスタートした (d 次元)BM を考えたいときには，$\boldsymbol{z}$ だけ空間座標をずらして $\mathbb{P}^{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{B}_t \in \cdot) \equiv \mathbb{P}(\boldsymbol{B}_t + \boldsymbol{z} \in \cdot)$ とする．こうすれば $\mathbb{P}^{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{z}) = 1$ となる．

- $\mathbb{P}$ (または $\mathbb{P}^{\boldsymbol{z}}$) に関する期待値 (expectation) を $\mathbb{E}$ (または $\mathbb{E}^{\boldsymbol{z}}$) と書くことにする．
- Z_t を確率過程とする．条件付き期待値 $\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s], s < t$ は次を満たすものとして定義される；

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s], A\Big] = \mathbb{E}[Z_t|A], \quad {}^{\forall}A \in \mathcal{F}_s, \quad s \le t. \tag{2.3}$$

- Z_t が ($\mathcal{F}_t$-) **マルチンゲール (martingale)** であるとは，Z_t が，各 $t \geq 0$ で $\mathbb{E}[|Z_t|] < \infty$, かつ

$$\mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_s] = Z_s, \quad {}^\forall s \leq t \tag{2.4}$$

を満たす確率過程であることを意味する．上の条件付き期待値の定義式 (2.3) より，(2.4) は

$$\mathbb{E}[Z_t, A] = \mathbb{E}[Z_s, A], \quad {}^\forall A \in \mathcal{F}_s \tag{2.5}$$

に等しい．

- **マルチンゲール**とは，元々は勝ち負けが半々の賭けでの**「倍賭け」**という必勝法のこと．まず１万円を賭け，負けたら２万円，以下４万円，８万円，１６万円，$\cdots$ と続ける．勝ったときにやめることにすれば，いつも１万円儲かる．(ただしこれは，無限の賭け金を持っていればの話なので要注意．) 転じて，各時刻での期待値が有限であり，過去の遍歴には依らずに一定であるような確率過程をマルチンゲールとよぶ．

- τ が $\mathcal{F}_t$-**停止時刻 (stopping time)** $\iff$ 各 t に対して，$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$
- Z_t が**局所マルチンゲール (local martingale)**
$\iff$ $\mathcal{F}_t$-停止時刻の列 $\tau_1 < \tau_2 < \cdots$ $(\tau_j \to \infty, j \to \infty)$ が存在して，各 j に対して $Z_{t\wedge\tau_j}$ はマルチンゲール．ただし，$a \wedge b = \min\{a, b\}$.
- τ を $\mathcal{F}_t$-停止時刻とする．任意の有界な $\mathcal{F}_t$-可測関数 f に対して

$$\mathbb{E}^x[f(Z_{\tau+t})|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}^{Z_\tau}[f(Z_t)] \quad {}^\forall t \ge 0 \tag{2.6}$$

が成り立つとき，確率過程 Z_t は**強マルコフ性 (strong Markov property)** を持つと言う．

<u>**注 2.2.**</u> 定義より，(d 次元)BM はマルチンゲールであり，強マルコフ性をもつことが分かる．一般に，強マルコフ性をもつ連続確率過程を**拡散過程**と言う．

- 時間に比例した変動をもつ (つまり速度が定義できる) 確率過程を**有界変動過程**と言う．マルチンゲールと有界変動過程の和で与えられる確率過程を**半マルチンゲール**と呼ぶ.

- 確率過程 Z_t の**二次変分** (**quadratic variation**) を $\langle Z \rangle_t$ とおく:

$$\langle Z \rangle_t = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} (Z(t_{j+1}) - Z(t_j))^2$$

ただしここで，$\mathbb{P}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}$ は時間区間 $[0, t]$ の分割 $0 \equiv t_0 < t_1 < \cdots < t_n \equiv t$ を無限に細かくしていく極限における**確率収束**を意味するものとする.

- 確率変数の列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と確率変数 X が同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で定義されているものとする．$n \to \infty$ のとき $\{X_n\}$ が X に**確率収束**するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

となることを言う．ここではこれを $\mathbb{P}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}$ と記した.

- Z_t が有界変動過程である場合は $\langle Z \rangle_t = 0$ である.

- 確率過程 $Z_t, \widehat{Z}_t$ に対して
$$\langle Z, \widehat{Z} \rangle_t \equiv \frac{1}{4}\left\{ \langle Z + \widehat{Z} \rangle_t - \langle Z - \widehat{Z} \rangle_t \right\}$$
と定義し, さらに $dZ_t d\widehat{Z}_t = d\langle Z, \widehat{Z} \rangle_t$ という記法を用いることにする.

- BM の二次変分は
$$dB_t dB_t = dt$$
であるが, 逆に二次変分が dt である連続マルチンゲールは BM に限る.

- 一般に連続なマルチンゲールは二次変分により一意的に定まる.

- B_t^1 と B_t^2 が互いに独立な BM であるとき $dB_t^1 dB_t^2 = 0$ となるので, d 次元 BM
$$\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^d)$$
に対して
$$dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij} dt$$
が成立する.

- 多次元の場合でも $dM_t^i dM_t^j, 1 \leqq i, j \leqq d$ が与えられるとマルチンゲール $\boldsymbol{M}_t = (M_t^1, M_t^2, \ldots, M_t^d)$ が一意的に決まることが知られている.

- $\boldsymbol{Z}_t = (Z_t^1, Z_t^2, \ldots, Z_t^d)$ をマルチンゲール部分が $\boldsymbol{M}_t$, 有界変動部分が $\boldsymbol{A}_t = (A_t^1, A_t^2, \ldots, A_t^d)$ である d 次元半マルチンゲールとする. F を $\mathbb{R}^d$ 上で定義された 2 階微分可能な実数値関数としたとき確率過程 $F(\boldsymbol{Z}_t)$ は,

$$dF(\boldsymbol{Z}_t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{Z}_t)\left(dM_t^j + dA_t^j\right) + \frac{1}{2}\sum_{1\le j,k\le d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{Z}_t) dM_t^j dM_t^k \quad (2.7)$$

と展開することができる. これを**伊藤の公式**と言う.
右辺の第 2 項は有界変動部分であるが, 以下ではこれを**ドリフト項**とも呼ぶことにする.

2.2 d次元ベッセル過程 (BES$_d$) の定義

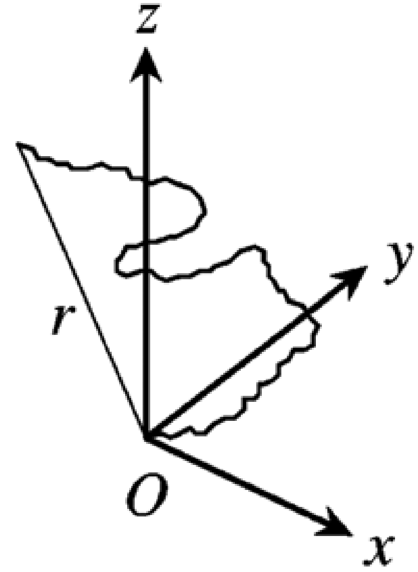
$d = 1, 2, 3, \cdots$ として, d 次元ブラウン運動

$$\boldsymbol{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \cdots, B_t^d)$$

を考える.
これは $\mathbb{R}^d$ 内のベクトル値確率過程と見なせるが，このベクトルの大きさ ($\boldsymbol{B}_t$ の動径成分 $|\boldsymbol{B}_t|$)

$$X_t = \sqrt{(B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + \cdots + (B_t^d)^2} \tag{2.8}$$

を考えると，これは 1 次元拡散過程となる．ただし，$X_t \in \mathbb{R}_+ \equiv \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ である.



$$F(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$$

とおくと,

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \frac{x_k}{F}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F} - \frac{x_k^2}{F^3}$$

であるが

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} = \frac{1}{F}\left\{d - \frac{1}{F^2}\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right\} = \frac{d-1}{F}$$

なので, 伊藤の公式 (2.7) と, $B_t^1, \cdots, B_t^d$ の独立性

$$dB_t^k dB_t^\ell = \delta_{k\ell} dt, \quad 1 \leq k, \ell \leq d \tag{2.9}$$

より

$$dX_t = \frac{1}{X_t}\sum_{k=1}^{d} B_t^k dB_t^k + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t}$$

となる.
ここで, マルチンゲール部分の二次変分をとると, 再び (2.9) より

$$\left(\frac{1}{X_t}\sum_{k=1}^{d} B_t^k dB_t^k\right)^2 = \frac{1}{X_t^2}\sum_{k=1}^{d}(B_t^k)^2(dB_t^k)^2 = \frac{1}{X_t^2}\sum_{k=1}^{d}(B_t^k)^2 dt = dt$$

であるから, これは, 上の $\{B_t^j\}_{j=1}^d$ とは別の BM, B_t によって dB_t と与えられるものとしてよい.

以上より，X_t が満たす**確率微分方程式 (stochastic differential equation, SDE)** は

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{1}{X_t}dt \tag{2.10}$$

で与えられることが分かった.

- 以下では
$$d \geq 1$$
として，一般に (2.10 の SDE に従う 1 次元拡散過程を考えることにする.

- $d=1$ のときは原点に反射壁を置くものとする:
$$X_t = |B_t|$$

- これを ***d*-次元ベッセル過程 (Bessel process)** とよび，以下では BES_d と略記することにする.

- (2.10) の右辺の第 1 項はマルチンゲール部分 (BM)，第 2 項が有界変動部分 (ドリフト項) であるので，BES_d は半マルチンゲールであることが分かる.

注 2.3. **ベッセル過程**という呼び名は，X_t の推移 (確率) 密度が，以下に示すように**変形ベッセル関数** I_ν で表されることによる．

SDE

$$dX_t = dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{1}{X_t}dt$$

に対応して，**コルモゴロフ後進方程式 (Kolmogorov backward equation)**

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t;x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t;x,y) + \frac{d-1}{2}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}p(t;x,y) \tag{2.11}$$

が得られる．

$d \geq 2$, および $1 \leq d < 2$ で原点に反射条件を課した場合，BES_d の対称な推移密度 ($p(t;x,y) = p(t;y,x)$ とする) は (2.11) の解

$$p(t;x,y) = \frac{1}{2t}(xy)^{-\nu} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \tag{2.12}$$

で与えられる．ただし，

$$\nu = \frac{d-2}{2} \geq -\frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad d = 2(\nu+1) \geq 1 \tag{2.13}$$

であり，$I_\nu(z)$ は変形ベッセル関数

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

である．ここで，$\Gamma(z)$ はガンマ関数：$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \quad \Re z > 0$.

スピード測度と呼ばれる測度が

$$m_\nu(dy) = 2y^{2\nu+1} dy \tag{2.14}$$

で与えられ，(2.12) に $m_\nu(dy)/dy = 2y^{2\nu+1}$ をかけることによって，BES_d に対して，時間 $t \geq 0$ の間に $x > 0$ から $y \geq 0$ へ推移する**推移確率密度関数**が

$$p(t,y|x) = \frac{1}{t}\frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \tag{2.15}$$

と与えられる．