臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部　香取眞理 (かとりまこと)

Section 2.B

Summer School 数理物理２００９ 「ベキ乗則の数理」

２００９年8月２７－３０日

東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

2.3 BES$_d$ の次元性

以下では，初期値を上付き添字で表し，$x>0$ から出発した BES_d を X_t^x と書くことにする:

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad t \geq 0, \qquad X_0^x = x > 0. \tag{2.16}$$

ベッセル過程のスケーリング性

命題 2.1 任意の $x>0$ に対して

$$\frac{1}{x}X_{x^2t}^x \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_t^1. \tag{2.17}$$

<u>証明.</u>　これは BM のスケーリング性

$$\frac{1}{x}B_{x^2t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} B_t$$

が遺伝したものである．$Y_t = \dfrac{1}{x}X_{x^2t}^x$ とおくと，

$$dY_t = \frac{1}{x}\left(dB_{x^2t} + \frac{d-1}{2}\frac{d(x^2t)}{X_{x^2t}^x}\right) = \frac{1}{x}dB_{x^2t} + \frac{d-1}{2}\frac{x}{X_{x^2t}^x}dt = d\widetilde{B}_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{Y_t}.$$

ここで，$\widetilde{B}_t \equiv B_{x^2t}/x \stackrel{\mathrm{d}}{=} B_t$. また，初期値は $Y_0 = X_0^x/x = x/x = 1$. ∎

$x > 0$ から出発した BES_d が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す；

$$T_x = \inf\left\{t > 0 : X_t^x = 0\right\}.$$

SDE (2.16) は $t \leq T_x$ までは well-defined である．次の定理が証明できる．

定理 2.2 (i) $d \geq 2 \implies T_x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．

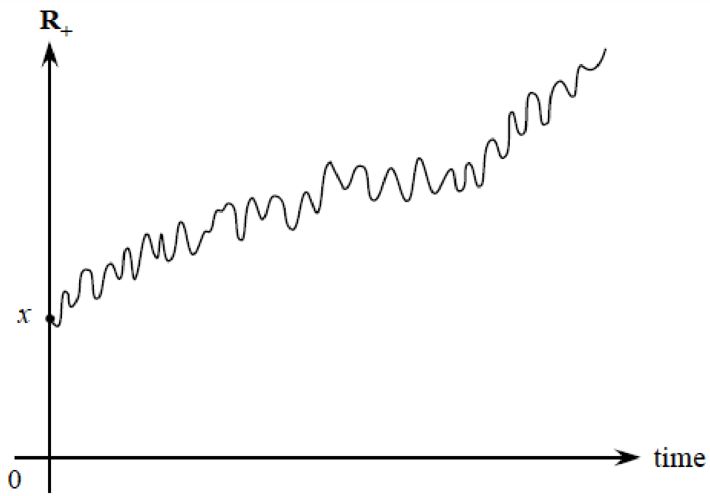
(ii) $d > 2 \implies \lim_{t\to\infty} X_t^x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．

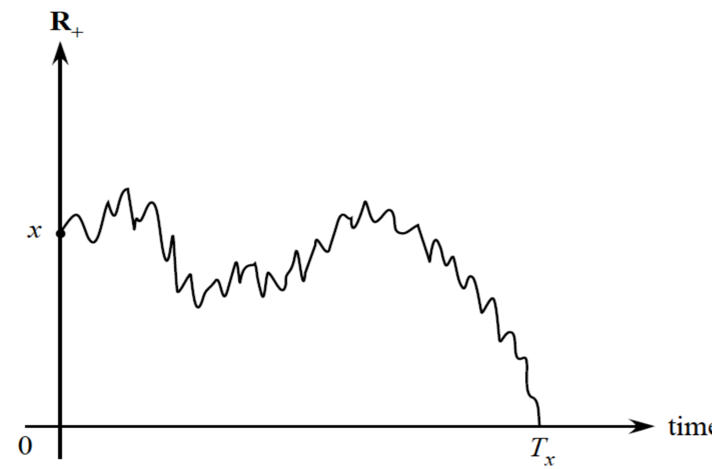
(iii) $d = 2 \implies \inf_{t>0} X_t^x = 0, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．
つまり，$x > 0$ から出発した BES_2 は原点にはぶつからないが，原点に無限に近づく．

(iv) $1 \leq d < 2 \implies T_x < \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ．

$x > 0$ から出発した BES_d が初めて原点に到達する時刻を T_x と記す；

$$T_x = \inf\left\{t > 0 : X^x(t) = 0\right\}.$$





定理 2.2 (i) $d \geq 2 \implies T_x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

(ii) $d > 2 \implies \lim_{t\to\infty} X_t^x = \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

(iii) $d = 2 \implies \inf_{t>0} X_t^x = 0, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

つまり，$x > 0$ から出発した BES_2 は原点にはぶつからないが，原点に無限に近づく.

(iv) $1 \leq d < 2 \implies T_x < \infty, {}^\forall x > 0$ が確率 1 で成り立つ.

証明　テキストを参照のこと.

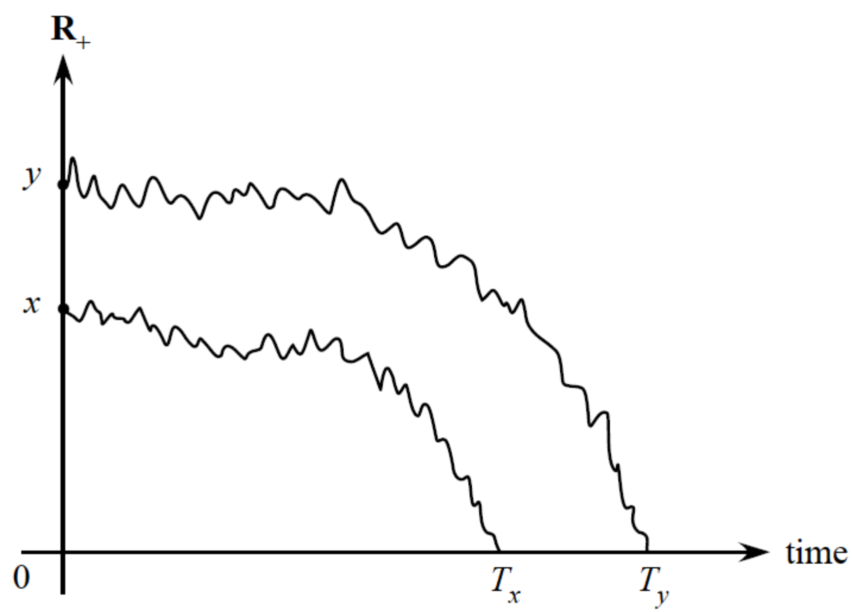
以下では，$1 \le d < 2$ の場合を考えることにする．
$x \in \mathbb{R}_+$ に対して，同一の BM, B_t を用いて

$$X_t^x = x + B_t + \frac{d-1}{2} \int_0^t \frac{ds}{X_s^x}, \quad t \le T_x \tag{2.19}$$

で与えられる BES_d の族 $\{X_t^x\}_{x>0}$ を考えることにする．
この定義より

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad X_t^x < X_t^y, \ {}^\forall t < T_x \quad \Longrightarrow \quad T_x \le T_y$$

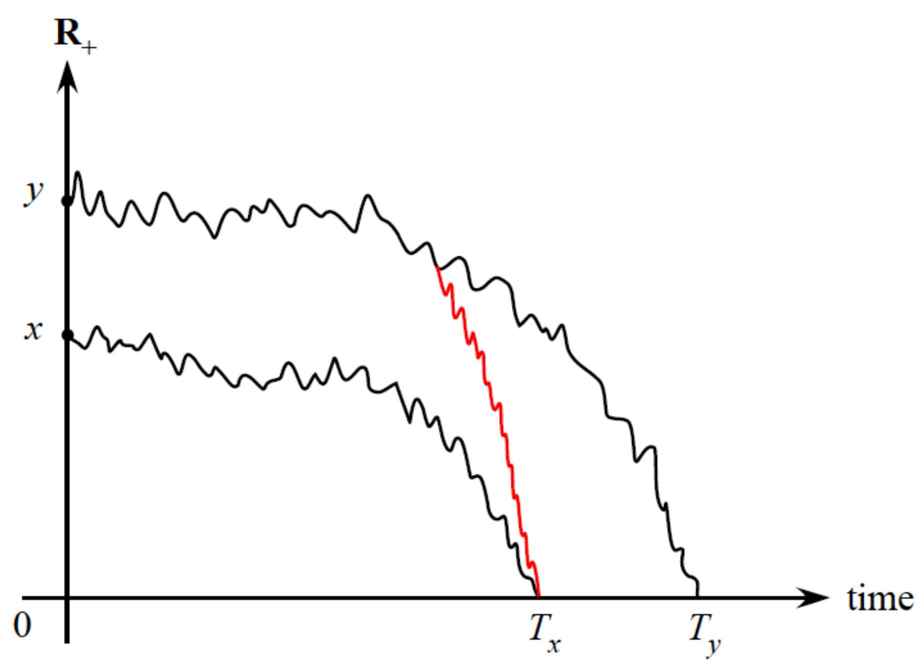
であることは明らかである．
$x < y$ だが，$T_x = T_y$ となることはあり得るであろうか．



次の定理は，$x<y$ であっても，$T_x=T_y$ ということがあり得ることを主張するものである．

定理 2.4 (i) $\frac{3}{2}<d<2 \implies x<y$ に対して $\mathbb{P}(T_x=T_y)>0$.

(ii) $1\le d\le \frac{3}{2} \implies x<y$ に対して，$T_x<T_y$ が確率 1 で成り立つ．



そこで, $x \leq y$ に対して

$$q(x,y) = \mathbb{P}(T_x = T_y)$$

とおくことにする.

まず，スケーリング性

$$\frac{1}{x} X^x_{x^2 t} \overset{\mathrm{d}}{=} X^1_t.$$

より，空間スケールが違っていても，時間スケールを適当に変えれば分布としては同一視できるので，比だけが重要であることが分かる．よって

$$q(x,y) = q(1, y/x)$$

である.

また，任意の $t > 0$ に対して $\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(T_r < t) = 0$ であるから

$$\lim_{r\to\infty} q(1,r) = 0 \tag{2.20}$$

である.

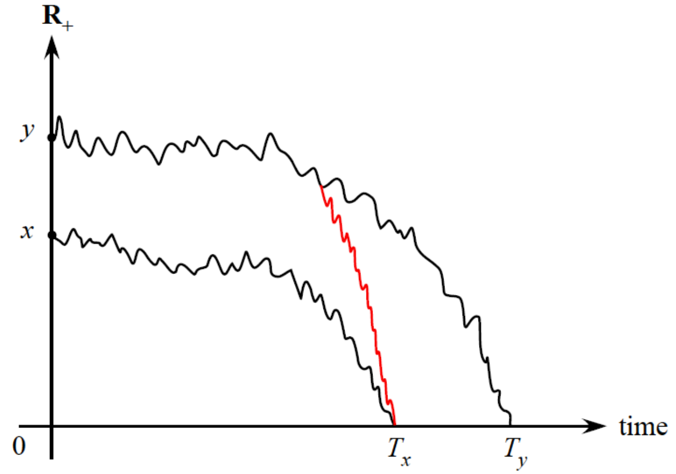
補題 2.3 $0 < x < y$ に対して，事象 $\{T_x = T_y\}$ と次の事象とは，確率 0 の部分を除いて等しい；

$$\sup_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} < \infty. \tag{2.21}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\text{事象 (2.21)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \leq {}^{\exists}c < \infty, \quad 0 < t < T_x \\
&\Longleftrightarrow \quad X_t^y - X_t^x \leq {}^{\exists}c X_t^x, \quad 0 < t < T_x \\
&\Longleftrightarrow \quad X_t^y \leq (1 + {}^{\exists}c) X_t^x, \quad 0 < t < T_x
\end{aligned}$$

なので，$X_t^x = 0 \Longrightarrow X_t^y = 0$, つまり (2.21) $\Longrightarrow T_x = T_y$.



よって，二つの事象の同値性を示すには，$T_x = T_y$ だが (2.21) が成り立たない状況は，確率 0 であることを言えばよい．

そのために

$$p_r = \mathbb{P}\left(T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sup_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} \geq r \right)$$

という確率を考える．

$$\tau_r = \inf_{t<T_x} \left\{ \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = r \right\}$$

なる時刻があったとすると，この時刻 τ_r では $X_t^y / X_t^x = 1 + r$ となる．そこで，この時刻から再スタートしたプロセスを考えると，BES_d の強マルコフ性から

$$p_r \leq q(1, 1+r)$$

という評価が得られる．(2.20) より

$$\lim_{r\to\infty} q(1, 1+r) = 0$$

なので，

$$p_\infty = \lim_{r\to\infty} p_r = \mathbb{P}\left(T_x = T_y \quad \text{かつ} \quad \sum_{t<T_x} \frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x} = \infty \right) = 0.$$

∎

定理 2.4 (i) $\frac{3}{2} < d < 2 \implies x < y$ に対して $\mathbb{P}(T_x = T_y) > 0$.

(ii) $1 \le d \le \frac{3}{2} \implies x < y$ に対して, $T_x < T_y$ が確率 1 で成り立つ.

証明 (途中まで). $0 < x < y$ に対して, 次の確率過程を考える

$$Z_t = \log\left(\frac{X_t^y - X_t^x}{X_t^x}\right), \quad t < T_x. \tag{2.22}$$

ただし,

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^x} + dB_t, \quad dX_t^y = \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^y} + dB_t$$

である. ここで, 共通の BM, B_t を用いていることに注意せよ.

$f(x,y) = \log\{(y-x)/x\}$ とおき, $f_x(x,y) = \partial f(x,y)/\partial x$ というような偏微分の略記を用いると,

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{y-x}$$
$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(y-x)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{1}{(y-x)^2}$$

であるから, 伊藤の公式 (2.7) より

$$\begin{aligned} dZ_t &= f_x(X_t^x, X_t^y)\left[dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^x}\right] + f_y(X_t^x, X_t^y)\left[dB_t + \frac{d-1}{2}\frac{dt}{X_t^y}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(X_t^x, X_t^y) + 2f_{xy}(X_t^x, X_t^y) + f_{yy}(X_t^x, X_t^y)\right]dt \\ &= -\frac{1}{X_t^x}dB_t + \left[\left(\frac{3}{2} - d\right)\frac{1}{(X_t^x)^2} + \frac{d-1}{2}\frac{X_t^y - X_t^x}{(X_t^x)^2 X_t^y}\right]dt \end{aligned} \tag{2.23}$$

が得られる.

ここで，次の関係を満たすように，**ランダムな時間変更** $t \to r$ を行う；

$$\int_0^{r(t)} \frac{ds}{(X_s^x)^2} = t. \tag{2.24}$$

つまり，$dr(t)/(X_{r(t)}^x)^2 = dt$ である．(2.23) を変更された後の時刻 $r(t)$ で考えると，

$$dZ_{r(t)} = -\frac{1}{X_{r(t)}^x} dB_{r(t)} + \left[\left(\frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2}$$

となるが，ここで

$$\widetilde{B}_t = -\int_0^{r(t)} \frac{dB_s}{X_s^x}$$

とおくと，

$$(d\widetilde{B}_t)^2 = \frac{1}{(X_{r(t)}^x)^2} (dB_{r(t)})^2 = \frac{dr(t)}{(X_{r(t)}^x)^2} = dt$$

なので，$\widetilde{B}_t$ は BM である．そこで $\widetilde{Z}_t = Z_{r(t)}$ と書くことにすると

$$d\widetilde{Z}_t = d\widetilde{B}_t + \left[\left(\frac{3}{2} - d \right) + \frac{d-1}{2} \frac{X_{r(t)}^y - X_{r(t)}^x}{X_{r(t)}^y} \right] dt \tag{2.25}$$

という SDE が得られる．

以下はテキストを参照せよ．∎

付録A.1　マルチンゲールと超幾何方程式

$\dfrac{3}{2} < d < 2$ のときは，$x \geq 0$ に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) > 0$$

であることを証明したが，この確率の x 依存性は**ガウスの超幾何関数**

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (c)_k \equiv \Gamma(c+k)/\Gamma(c) = c(c+1)\cdots(c+(k-1)) \tag{2.26}$$

を用いて，正確に表すことができる.

命題 2.5 $\dfrac{3}{2} < d < 2$ のとき，$x \geq 0$ に対して

$$\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 1 - \frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{2d-3} F\left(2d-3, d-1, 2(d-1); \frac{x}{1+x}\right). \tag{2.27}$$

<u>証明.</u>　確率過程

$$R_t = \frac{X_t^{1+x} - X_t^1}{X_t^1}, \quad x > 0 \tag{2.28}$$

を考える. $g(x,y) = (y-x)/x$ とおくと

$$g_x(x,y) = -\frac{y}{x^2}, \quad g_y(x,y) = \frac{1}{x}$$
$$g_{xx}(x,y) = \frac{2y}{x^3}, \quad g_{yy}(x,y) = 0, \quad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = -\frac{1}{x^2}$$

なので, 伊藤の公式 (2.7) より

$$dR_t = -\frac{R_t}{X_t^1}dB_t + \left[\frac{3-d}{2}\frac{1}{R_t} - \frac{d-1}{2}\frac{1}{R_t(1+R_t)}\right]\left(\frac{R_t}{X_t^1}\right)^2 dt \tag{2.29}$$

が得られる.

ここで，次の時間変更 $t \to \overline{\tau}(t)$ を行う；

$$\int_0^{\overline{\tau}(t)} \left(\frac{R_t}{X_t^1}\right)^2 ds = t. \tag{2.30}$$

また

$$\overline{B}_t = -\int_0^{\overline{\tau}(t)} \frac{R_s}{X_s^1} dB_s \tag{2.31}$$

とすると，$\overline{B}_t$ は BM であり，$\widetilde{R}_t = R_{\overline{\tau}(t)}$ とおくと

$$\begin{aligned} d\widetilde{R}_t &= \left[\frac{3-d}{2}\frac{1}{\widetilde{R}_t} - \frac{d-1}{2}\frac{1}{\widetilde{R}_t(\widetilde{R}_t+1)}\right] dt + d\overline{B}_t \\ &= \left[\frac{2-d}{\widetilde{R}_t} + \frac{d-1}{2}\frac{1}{\widetilde{R}_t+1}\right] dt + d\overline{B}_t \end{aligned} \tag{2.32}$$

が得られる．

$$\psi(x) = \mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = q(1, 1+x) \tag{2.33}$$

として，

$$\overline{M}_t = \psi(\widetilde{R}_t) \tag{2.34}$$

とおくと，BES_d のスケーリング性

$$\frac{1}{x} X^x_{x^2 t} \overset{\mathrm{d}}{=} X^1_t.$$

より，$\overline{M}_t$ はマルチンゲールである:

$$\mathbb{E}[\overline{M}_t | \mathcal{F}_s] = \overline{M}_s, \quad 0 \leq^{\forall} s < t. \tag{2.35}$$

他方，伊藤の公式 (2.7) と $\widetilde{R}_t$ の SDE (2.32) より

$$d\overline{M}_t = \psi'(\widetilde{R}_t) d\overline{B}_t + \psi'(\widetilde{R}_t) \left[\frac{2-d}{\widetilde{R}_t} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{\widetilde{R}_t + 1} \right] dt + \frac{1}{2} \psi''(\widetilde{R}_t) dt. \tag{2.36}$$

ドリフト項 $= 0$ であるはずなので，$\psi(x)$ に対して，次の微分方程式が得られる：

$$\frac{1}{2} \psi''(x) + \left[\frac{2-d}{x} + \frac{d-1}{2} \frac{1}{x+1} \right] \psi'(x) = 0. \tag{2.37}$$

ここで $x = \dfrac{u}{1-u} \iff u = \dfrac{x}{1+x}$ という変数変換 $x \to u$ を行い，$\widetilde{\psi}(u) = \psi(x)$ とおくと，(2.37) 式は

$$u(1-u)\widetilde{\psi}''(u) + \Big\{2(2-d) - (3-d)u\Big\}\widetilde{\psi}'(u) = 0 \tag{2.38}$$

となる．これは，**超幾何方程式**

$$u(1-u)F'' + \Big\{\gamma - (\alpha+\beta+1)u\Big\}F' - \alpha\beta F = 0 \tag{2.39}$$

で特に $\alpha = 0$, $\beta = 2-d$, $\gamma = 2(2-d)$ とした場合に他ならない．(2.39) の $u = 0$ における解の基本系として

$$F(\alpha, \beta, \gamma; u) \quad \text{と} \quad u^{1-\gamma}F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma; u)$$

をとる．$\alpha = 0$ なので前者は 1 であり，後者は $u^{2d-3}F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$ となる．よって，c_1, c_2 を積分定数として

$$\widetilde{\psi}(u) = c_1 + c_2u^{2d-3}F(2d-3, d-1, 2(d-1); u)$$

となる．ここで

$$\widetilde{\psi}(0) = \psi(0) = \mathbb{P}(T_1 = T_1) = 1, \qquad \widetilde{\psi}(1) = \psi(\infty) = \lim_{x\to\infty}\mathbb{P}(T_{1+x} = T_1) = 0$$

なので，

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = -F(2d-3, d-1, 2(d-1); 1) = -\frac{\Gamma(d-1)}{\Gamma(2(d-1))\Gamma(2-d)}$$

と定まる．∎