

臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部 香取眞理 (かとりまこと)

Section 3.A

Summer School 数理物理2009 「ベキ乗則の数理」

2009年8月27 - 30日

東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

3 Schramm-Loewner 発展 (SLE)

3.1 Riemann の写像定理について

- $\hat{\mathbb{C}}$ をリーマン球 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とする.
- 領域 D (開集合とする) に対して, その $\hat{\mathbb{C}}$ における補集合 $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の連結部分集合をなしているとき, D は単連結領域 (simply connected domain) であると言う.
- \mathbb{C} 上の原点を中心とする単位円を $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ と記す.

定理 3.1 (Riemann mapping theorem) D が \mathbb{C} 全体ではない単連結領域であるとする. この D 内の 1 点 $\omega \in D$ を選ぶ. このとき, D を単位円 \mathbb{D} に写す共形変換で

$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0 \quad (3.1)$$

であるものが存在し, それは一意的に定まる.

証明は

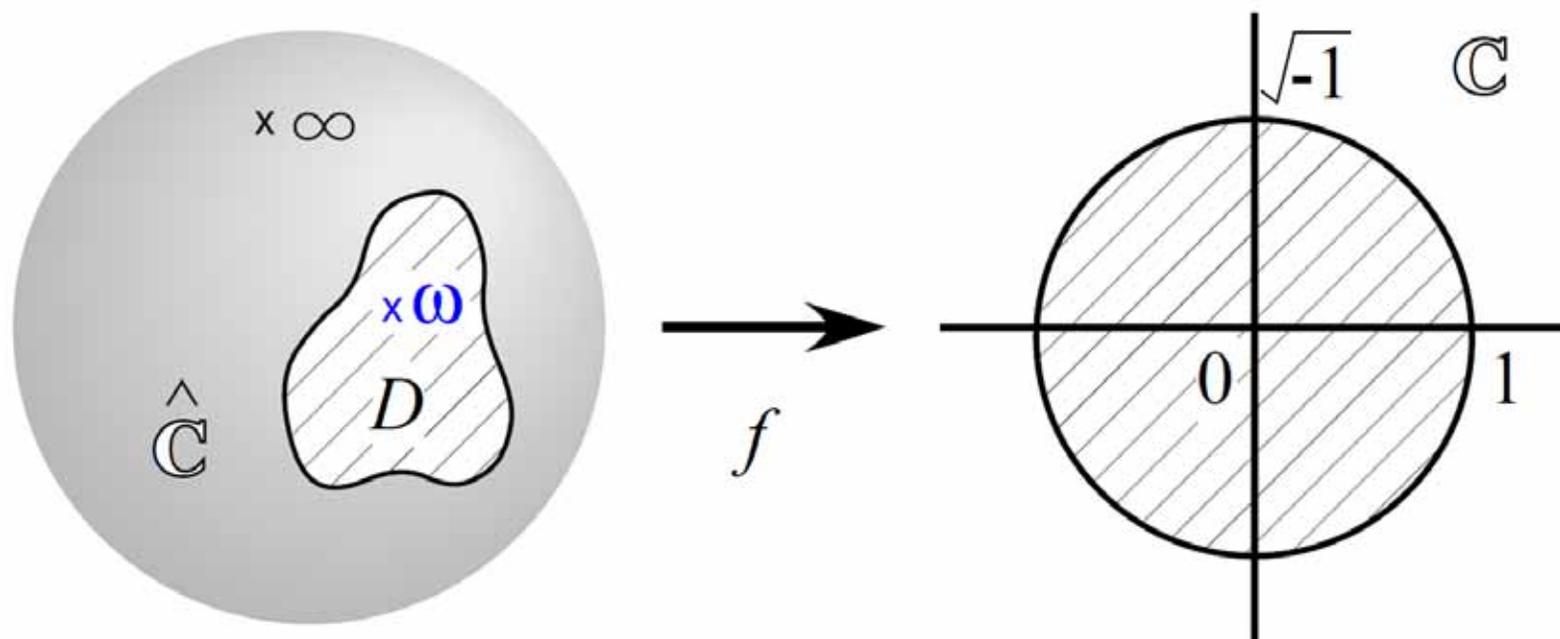
L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd ed., (McGraw-Hill, 1979).

を参照せよ.

定理 3.1 (Riemann mapping theorem) D が \mathbb{C} 全体ではない単連結領域であるとする. この D 内の 1 点 $\omega \in D$ を選ぶ. このとき, D を単位円 \mathbb{D} に写す共形変換で

$$f(\omega) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(\omega) > 0 \quad (3.1)$$

であるものが存在し, それは一意的に定まる.



- 複素上半平面を $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ と書く.
- 上半平面 \mathbb{H} の有界部分集合 A において, $A = \mathbb{H} \cap \overline{A}$ であり, かつ $\mathbb{H} \setminus A$ が単連結であるとき, A を **compact \mathbb{H} -hull** と言う. compact \mathbb{H} -hull 全体の集合を \mathcal{Q} と書くことにする. $A \in \mathcal{Q}$ 自体は連結である必要はない.

$A \in \mathcal{Q}$ が与えられているものとする. $\mathbb{H} \setminus A$ は \mathbb{C} 全体ではない単連結領域なので, リーマンの写像定理 (定理 3.1) より

$$f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}$$

という共形変換が存在することが保証されている.

また, **Möbius 変換**

$$f^{(2)}(z) = \frac{\bar{\alpha}z - \alpha\beta}{z - \beta}, \quad |\beta| = 1, \alpha \in \mathbb{H} \quad (3.2)$$

は

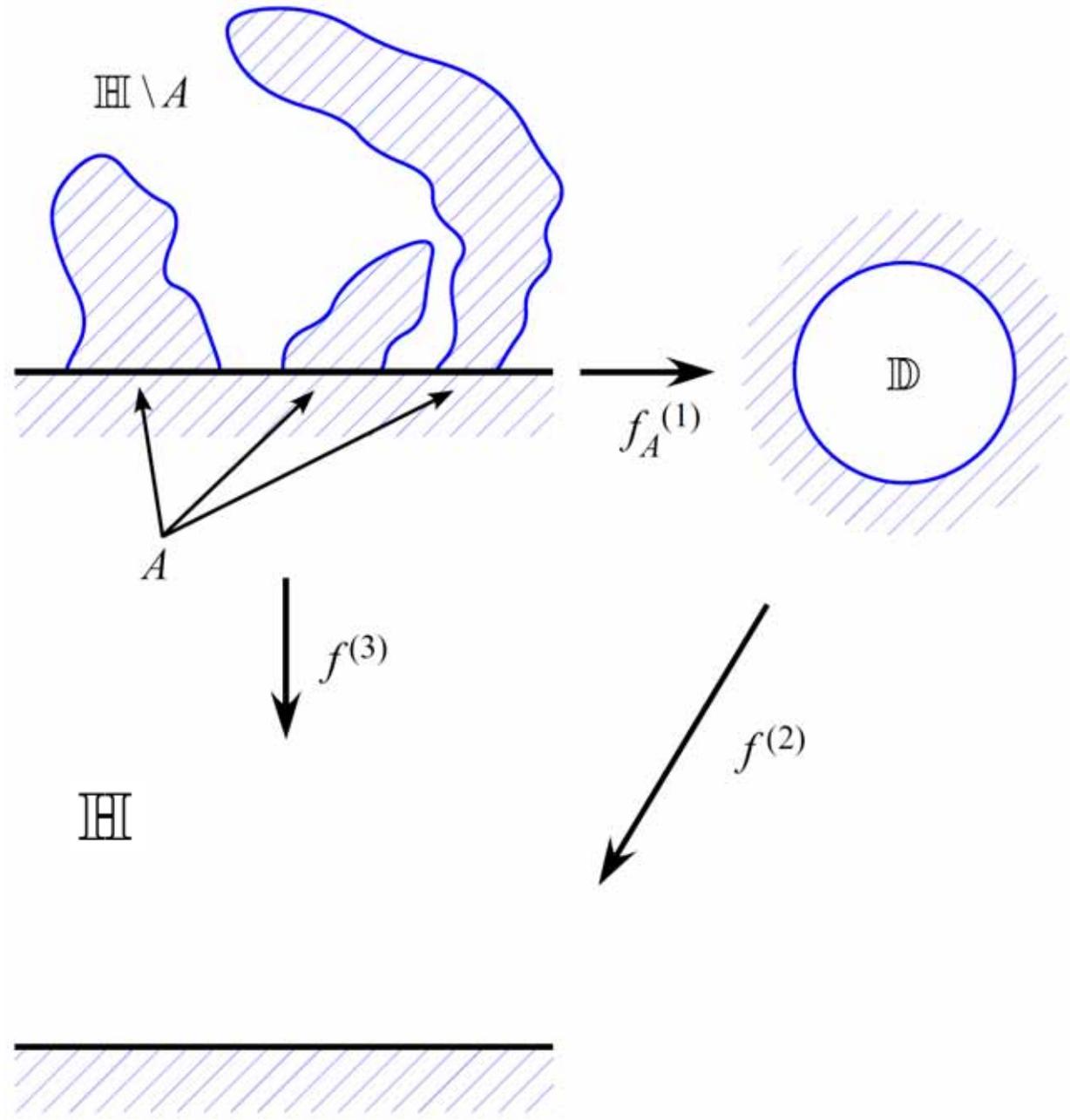
$$f^{(2)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$$

の共形変換である ($f^{(2)}(0) = \alpha$ である).

この 2 つを合成した $f_A^{(3)} = f^{(2)} \circ f^{(1)}$ は

$$f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$$

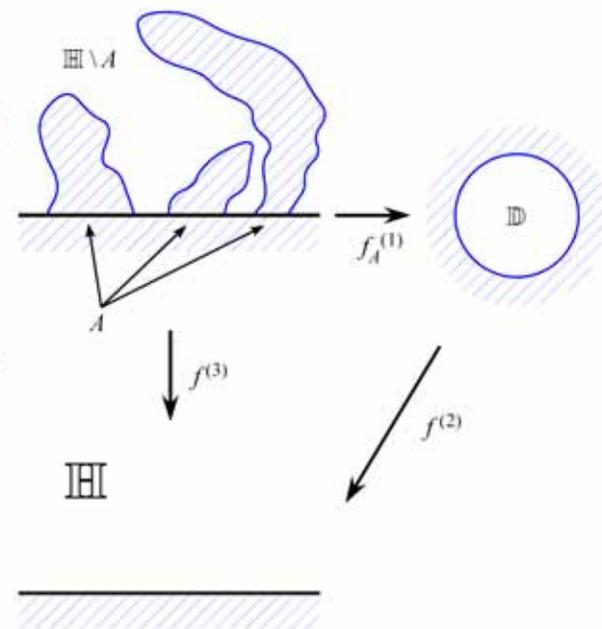
なる共形変換である.



- $\mathbb{H} \setminus A$ の境界は、 A の境界と実軸から成る.
- $f_A^{(1)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{D}$ によって、この境界は単位円周上 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ に写されることになる.
- また、 $f^{(2)} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ によって、単位円周は \mathbb{H} の境界、すなわち実軸（および無限遠点 ∞ ）に写ることになる.
- このことから、 $f_A^{(3)} : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H}$ によって、実軸上の点は実軸上の点に写されることになる。（また A の境界も実軸上に写される。）
- また、無限遠点 ∞ は、(3.2) で与えられる $f_A^{(1)}$ により単位円周上のいずれかの点に写されるが、 $f^{(2)}$ では特に $z = \beta$ という単位円周上の点が ∞ に写される.
- よって $f^{(2)}$ の径数 β を調節することにより、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [f_A^{(3)}(z) - z] = 0$$

となるように $f_A^{(3)}$ を選ぶことができる. これを流体力学的条件 (hydrodynamic condition) と呼ぶ.



以上では $f_A^{(3)}$ は $\mathbb{H} \setminus A$ 上で定義された関数であるが、これは実軸上 $z \in \mathbb{R}$ では実関数であるので、シュバルツの鏡像原理によって下半平面に解析接続することができる。 $1/f_A^{(3)}(1/z)$ を考えると、これは原点 0 を原点 0 に写す解析関数であるから、原点 0 の周りで次のようにテイラー展開できる。

$$\frac{1}{f_A^{(3)}(1/z)} = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

これより

$$f_A^{(3)}(z) = b_1 z + b_0 + b_{-1} \frac{1}{z} + b_{-2} \frac{1}{z^2} + \cdots, \quad b_j \in \mathbb{R}$$

という展開が得られる。ここで、 $z \in \mathbb{R}$ のときに $f_A^{(3)}(z)$ も実数であることから、係数 $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ である。

次に、 $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ の Möbius 変換で ∞ を ∞ に写すものを考えることにする。これは

$$f^{(4)}(z) = d_1 z + d_0, \quad d_1 > 0, d_0 \in \mathbb{R}$$

で与えられる。

これと $f_A^{(3)}$ との合成を考えると

$$\begin{aligned} [f^{(4)} \circ f_A^{(3)}](z) &= f^{(4)}(f_A^{(3)}(z)) \\ &= d_1 b_1 z + (d_1 b_0 + d_0) + d_1 b_{-1} z^{-1} + d_1 b_{-2} z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

となる。

特に

$$d_1 b_1 = 1, d_1 b_0 + d_0 = 0 \iff d_1 = \frac{1}{b_1}, d_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

と係数 d_0, d_1 を選ぶことにする。こうして定められた共形変換を

$$g_A : \mathbb{H} \setminus A \rightarrow \mathbb{H} \tag{3.3}$$

と書くことにすると、これは流体力学的条件 $\lim_{z \rightarrow \infty} [g_A(z) - z] = 0$ を満たし、

$$g_A(z) = z + c_{-1} \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + \cdots, \quad c_j \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

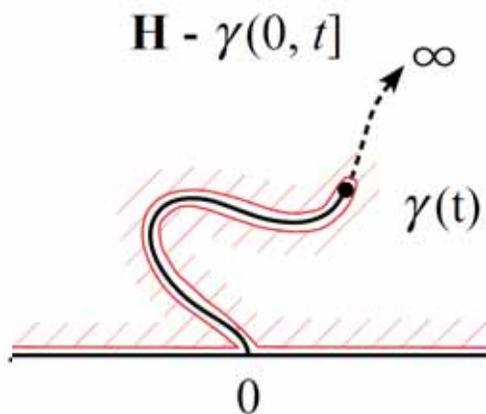
と展開されることになる。

3.2 複素上半平面内の曲線と共形変換

実軸上の一点 $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ を出発点として、時間 $t \in [0, \infty)$ とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma = \gamma[0, t], \quad t \in [0, \infty)$$

を考える. まずは単純曲線を考えることにし, また $\gamma(0, \infty) \in \mathbb{H}$ とする.

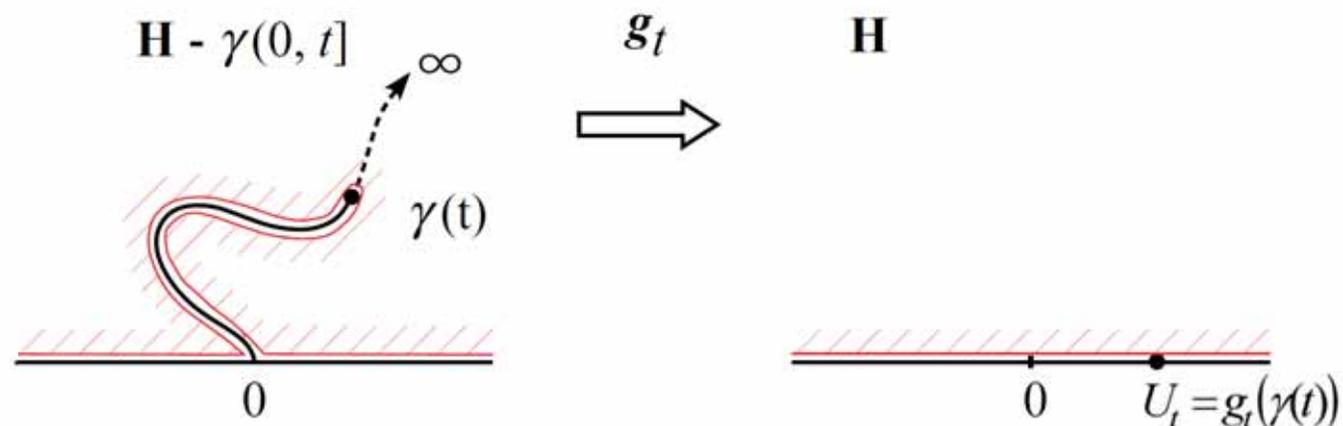


3.2 複素上半平面内の曲線と共形変換

実軸上の一点 $\gamma(0) \in \mathbb{R}$ を出発点として、時間 $t \in [0, \infty)$ とともに単調に伸びていく曲線

$$\gamma = \gamma[0, t], \quad t \in [0, \infty)$$

を考える。まずは単純曲線を考えることにし、また $\gamma(0, \infty) \in \mathbb{H}$ とする。



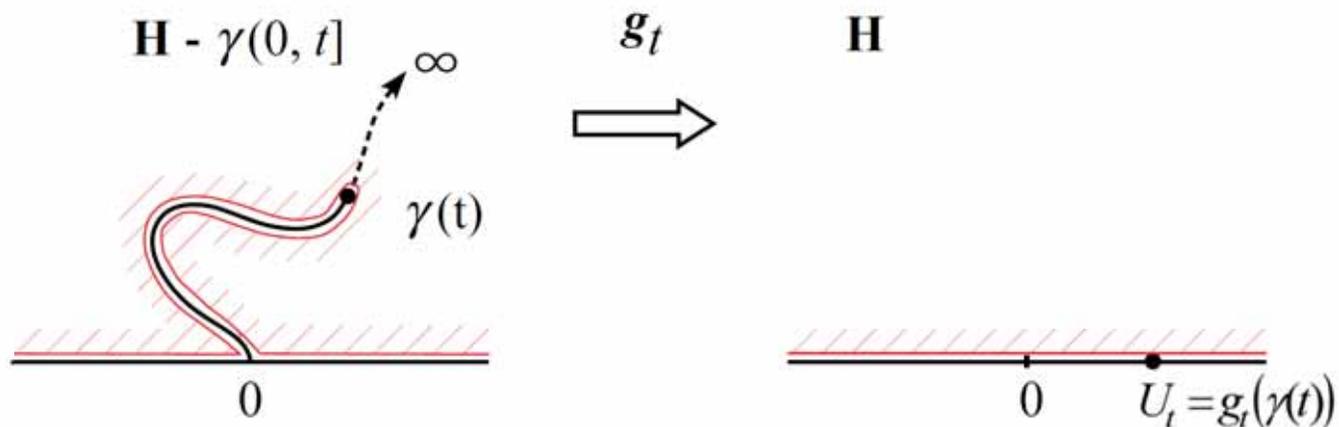
上の節で述べたように、リーマンの写像定理と Möbius 変換に関する知識より、各時刻 $t > 0$ において、

$$z + \frac{a_2(t)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad a_2(t) \in \mathbb{R}, \quad z \rightarrow \infty \quad (3.5)$$

という漸近形をもつ

$$\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$$

なる共形変換が唯一存在することを示すことができる。



この共形変換を

$$g_{\gamma(0,t]}(z) \quad \text{または} \quad g_t(z)$$

と書くことにする. $g_0(z) = z$ とする.

注 3.1. この変換 g_t によって, 領域 $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ の境界のうち, $\gamma(0, t] \cup \mathbb{R}$ は \mathbb{R} に, 無限遠点 ∞ は無限遠点 ∞ に写される.

以下、この 3.2 節では $t \in (0, \infty)$ を固定して考えることにする.

- $B_s^j, j = 1, 2$ を 2 つの独立な BM として, \mathbb{C} 上の複素 BM を

$$B_s = B_s^1 + \sqrt{-1}B_s^2, \quad s \in [0, \infty) \quad (3.6)$$

で定義する.

- いま, $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ の内点 z からスタートした複素 BM を考え, これがこの領域の境界である $\gamma(0, t] \cup \mathbb{R}$ のいずれかの点に初めて到達する時刻を

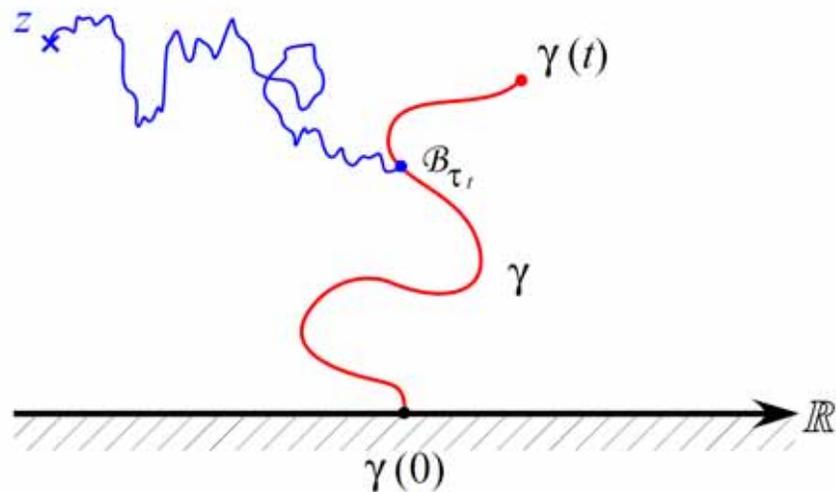
$$\tau_t = \inf \left\{ s \geq 0 : B_s \in \gamma(0, t] \cup \mathbb{R} \right\} \quad (3.7)$$

と書くことにする.

- $z - g_t(z)$ は $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ で有界な正則関数であり, その実部と虚部はそれぞれ調和関数である. ここでは虚部

$$\phi_t(z) = \Im(z - g_t(z)), \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$$

を考えることにする.



これは

$$\phi_t(z) = \mathbb{E}^z[\phi_t(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t)$$

と与えることができる.

定義 $\phi_t(z) = \Im(z - g_t(z))$ より

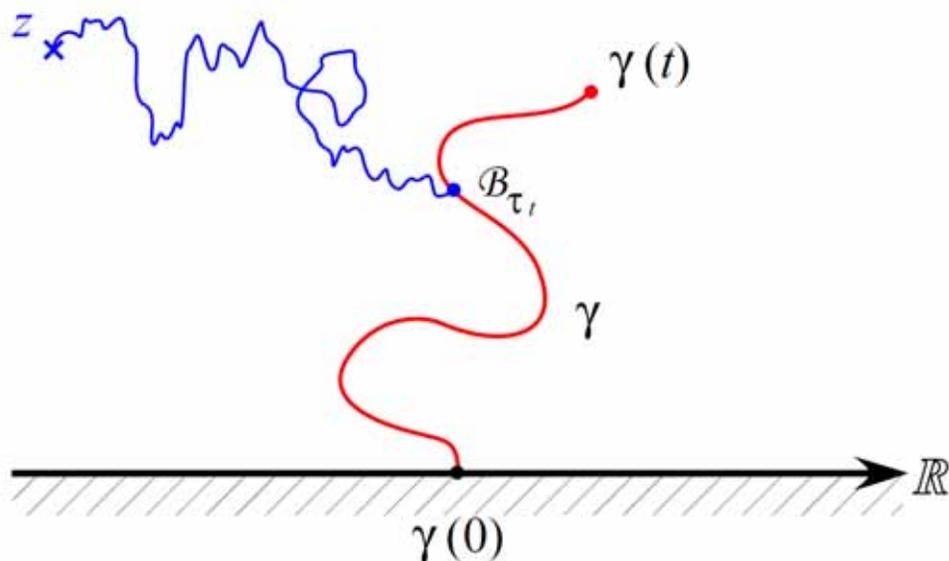
$$\phi_t(z) = \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})] - \mathbb{E}^z[\Im(g_t(\mathcal{B}_{\tau_t}))] = \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})]$$

となる. ここで, $\mathcal{B}_{\tau_t} \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t)$ であるので注 3.1 より $g_t(\mathcal{B}_{\tau_t}) \in \mathbb{R}$ であることを用いた.

したがって

$$\Im(g_t(z)) = \Im(z) - \mathbb{E}^z[\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})], \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t) \quad (3.8)$$

という表式が得られる.



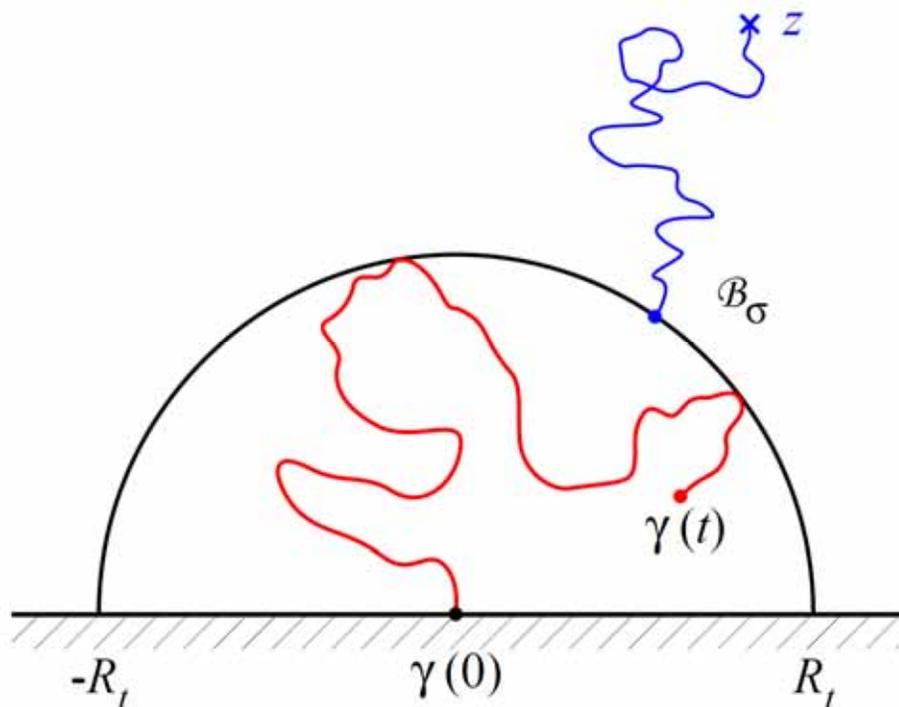
- R_t を

$$R_t = \sup \left\{ |\gamma(s) - \gamma(0)| : s \in (0, t] \right\} \quad (3.9)$$

と定義する.

$\gamma(0, t]$ は $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の半円 $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ の中に含まれることになる.

- この半円の外の \mathbb{H} の点 $z \in \mathbb{H} \setminus B(\gamma(0), R_t)$ に対して, この点からスタートした複素 BM を考えることにする. この複素 BM が $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ の半円周上, または実軸に初めて到達する時刻を σ と書くことにする;



- このとき、到達点 B_σ の半円上の分布密度を $p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}), \theta \in (0, \pi)$ と書くことにすると、複素 BM の強マルコフ性より

$$\mathbb{E}^z[\Im(B_\tau)] = \int_0^\pi p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}) \mathbb{E}^{\gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}}[\Im(B_\tau)] R_t d\theta \quad (3.10)$$

が成り立つ.

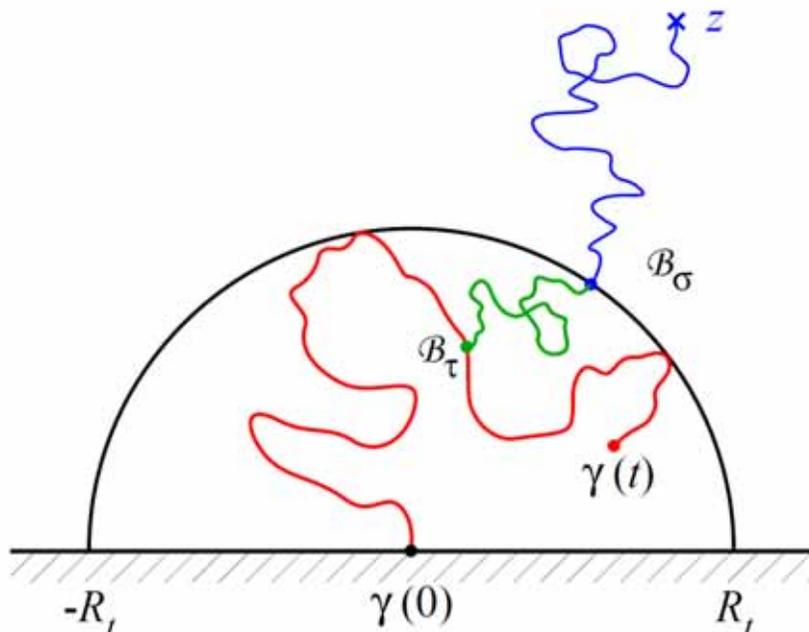
- この半円上の密度は、上半平面から半円 $B(\gamma(0), R_t) \cap \mathbb{H}$ を除いた領域

$$D = \{z \in \mathbb{H} : |z - \gamma(0)| > R_t\}$$

におけるポアソン核であり,

$$p(z, \gamma(0) + R_t e^{\sqrt{-1}\theta}) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) R_t^{n-1} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(z - \gamma(0))^n} \right], \quad z \in D, \quad \theta \in (0, \pi) \quad (3.11)$$

で与えられる (テキスト付録 A.2 を参照).



曲線 $\gamma[0, t]$ は、その出発点 $\gamma(0)$ を中心とする半径 R_t の円に含まれる。
したがって、この曲線を実軸に沿って $-\gamma(0)$ だけ平行移動して原点からスタートするようにした後、
全体を $1/R_t$ に拡大または縮小して得られる曲線を $\tilde{\gamma}[0, t]$ と書くことにすると、
これは原点を中心とする単位円に含まれることになる。

$$\tilde{\tau}_t = \inf \left\{ s \geq 0 : \mathcal{B}_s \in \tilde{\gamma}(0, t] \cup \mathbb{R} \right\} \quad (3.12)$$

とすると、複素 BM のスケール性よりこの分布は τ_t/R_t^2 の分布に等しく、

$$\mathbb{E}^{\gamma(0)+R_t e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})] = R_t \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})], \quad \theta \in (0, \pi)$$

である。

これらの結果を (3.8) に代入すると

$$\Im(g_t(z)) = \Im \left(z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n} \right)$$

となる。ただし

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n-1)\theta) \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.13)$$

である。

g_t は (3.5) という漸近形をもつ共形変換（正則関数）であるので、これより

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \quad (3.14)$$

と定まることになる。

$$g_t(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}(t)}{(z - \gamma(0))^n}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $n = 2, 3, \dots$ に対して $|\sin(n\theta)| \leq c_n \sin \theta$ となる有限な値 c_n をとることができる. よって

$$\begin{aligned} |a_n(t)| &\leq R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin((n-1)\theta)| \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \\ &\leq c_{n-1} R_t^{n-2} a_2(t), \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{aligned} \tag{3.15}$$

という評価が得られる.

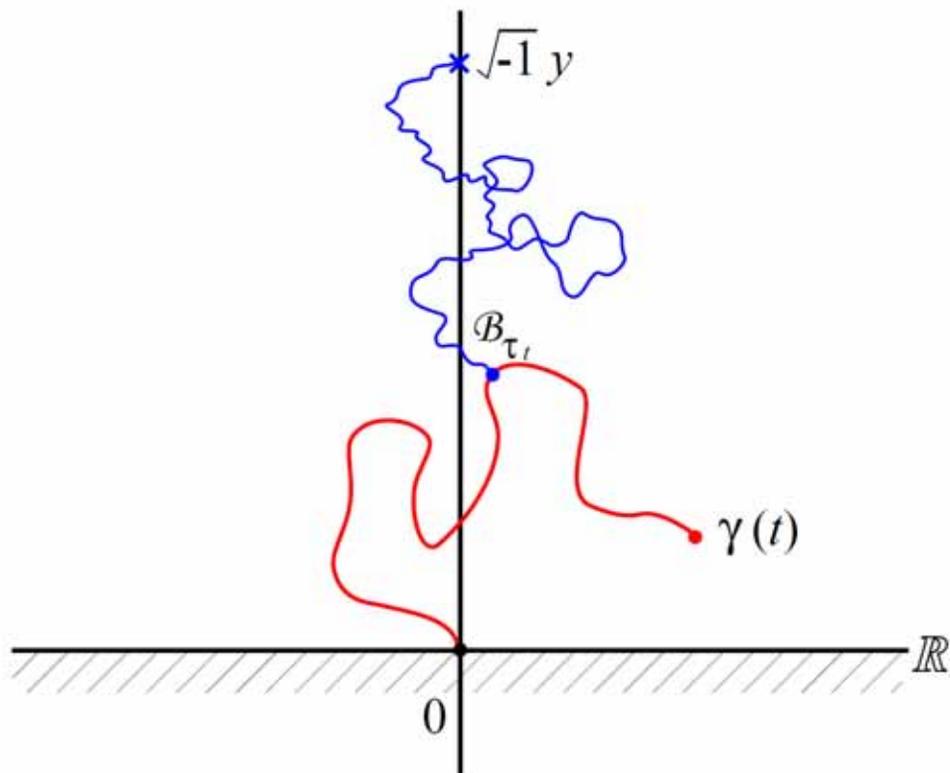
注 3.2. (3.13) で特に $n = 2$ とすると

$$a_2(t) = R_t^2 \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta \mathbb{E} e^{\sqrt{-1}\theta} [\Im(\mathcal{B}_{\tilde{\tau}_t})] d\theta \quad (3.16)$$

という表式が得られることになるが，上で与えた議論を逆にたどると

$$a_2(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} y \mathbb{E}^{\sqrt{-1}y} [\Im(\mathcal{B}_{\tau_t})] \quad (3.17)$$

であることが分かる．この量は曲線 $\gamma(0, t]$ の半平面 **capacity** ($\text{hcap}(\gamma(0, t])$ と書く) と呼ばれている．



補題 A.4 $r > 0, x \in \mathbb{R}$ とすると, $A \in \mathcal{Q}$ に対して次が成り立つ.

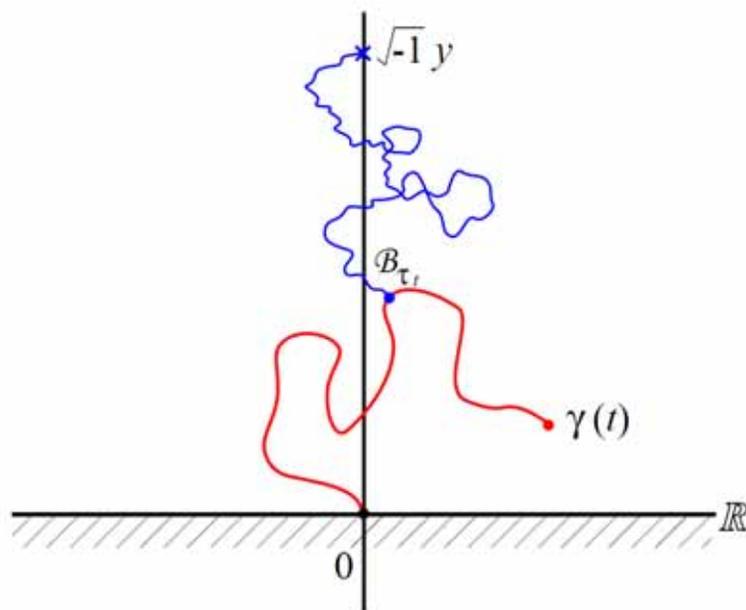
$$\text{hcap}(rA) = r^2 \text{hcap}(A), \quad (\text{A.39})$$

$$\text{hcap}(A + x) = \text{hcap}(A). \quad (\text{A.40})$$

補題 A.5 $A, B \in \mathcal{Q}, A \subset B$ とする. このとき

$$\text{hcap}(B) = \text{hcap}(A) + \text{hcap}(g_A(B \setminus A)) \quad (\text{A.44})$$

が成り立つ.



注 3.3. $H_t = \mathbb{H} \setminus \gamma(0, t]$ におけるポアソン核を $p_{H_t}(z, w)$, $z \in H_t$, $w \in \partial H_t = \tilde{\gamma}(0, t] \cap \mathbb{R}$ と書くと,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{e^{\sqrt{-1}\theta}}[\mathfrak{S}(\mathcal{B}_{\tilde{\gamma}_t})] &= \int_{\partial H_t} p_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) \mathfrak{S}(w) dw \\ &= \int_{\tilde{\gamma}(0, t]} p_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) \frac{\mathfrak{S}(w)}{\mathfrak{S}(e^{\sqrt{-1}\theta})} dw \times \mathfrak{S}(e^{\sqrt{-1}\theta}) \\ &= \sin \theta \int_{\tilde{\gamma}(0, t]} \hat{p}_{H_t}(e^{\sqrt{-1}\theta}, w) dw \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\hat{p}_D(z, w) \equiv p_D(z, w) \frac{\mathfrak{S}(w)}{\mathfrak{S}(z)}, \quad z \in D, \quad w \in \partial D \quad (3.18)$$

としたが, これは次式で定義される \mathbb{H} -excursion $\hat{\mathcal{B}}_s$ のポアソン核になっている:

$$\hat{\mathcal{B}}_s = B_s + \sqrt{-1}X_s, \quad s \in [0, \infty). \quad (3.19)$$

ここで B_s は BM であり, X_s はこれと独立な BES_3 (3次元ベッセル過程) である. したがって上の量は $\sin \theta \mathbb{P}^{e^{\sqrt{-1}\theta}}(\hat{\mathcal{B}}[0, \infty) \cap \tilde{\gamma}(0, t] \neq \emptyset)$ となるので, 係数 $a_n(t)$ に対しては

$$a_n(t) = R_t^n \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin((n-1)\theta) \sin \theta \mathbb{P}^{e^{\sqrt{-1}\theta}}(\hat{\mathcal{B}}[0, \infty) \cap \tilde{\gamma}(0, t] \neq \emptyset) d\theta \quad (3.20)$$

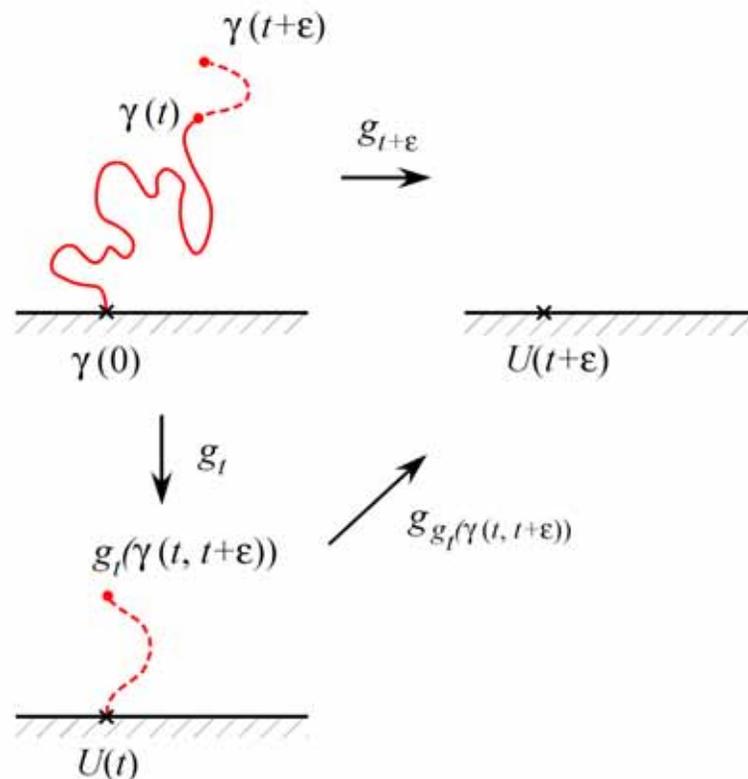
という \mathbb{H} -excursion と曲線 $\tilde{\gamma}(0, t]$ との交差確率を用いた表式も得られる.

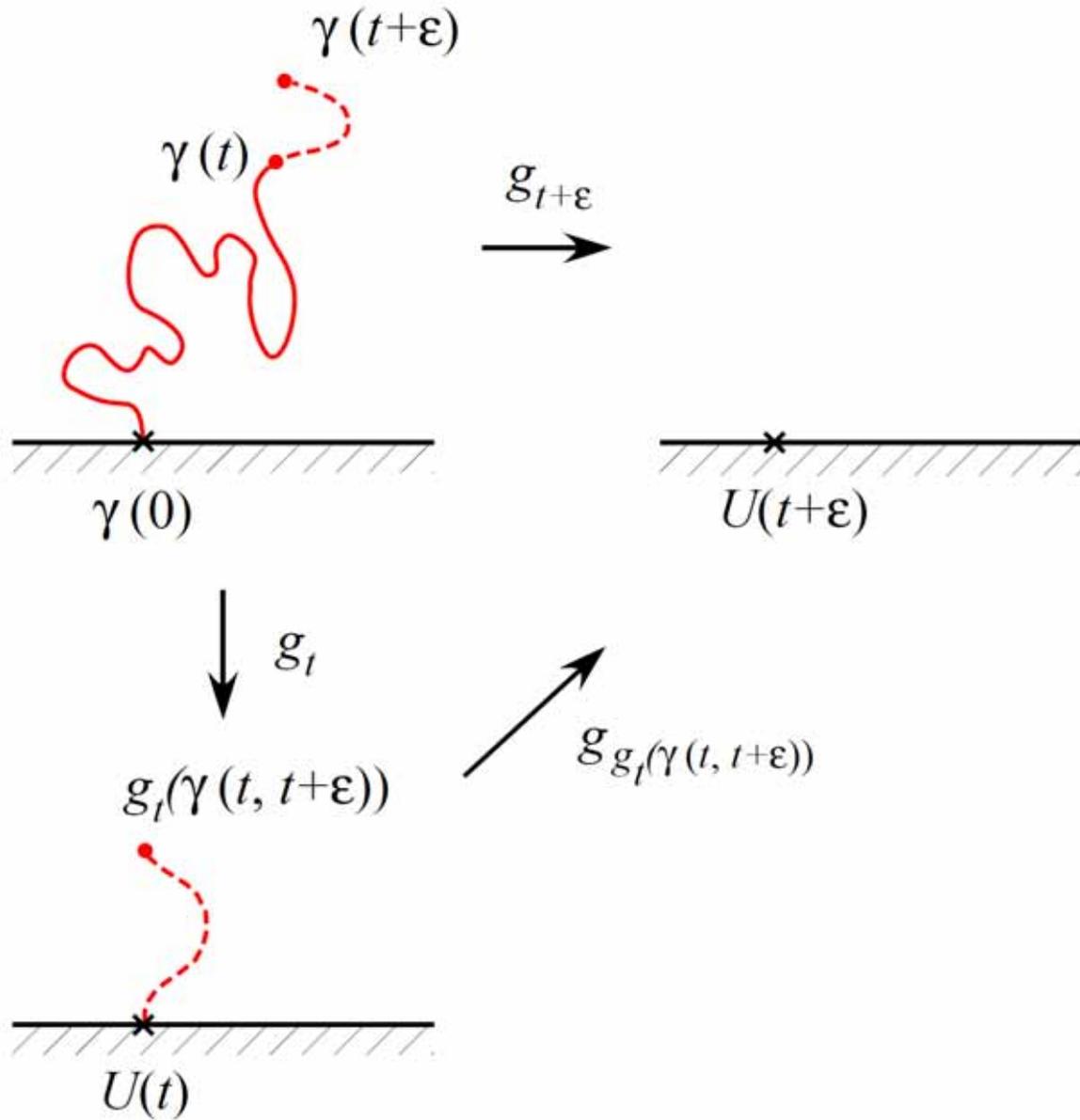
3.3 Loewner の微分方程式

この 3.3 節では、時間を連続的に変化させて \mathbb{H} 内の曲線 γ とそれに伴う共形変換 $g_t(x)$ の時間発展を追うことにする。

$\varepsilon > 0$ として、時刻 $t+\varepsilon$ までの曲線 $\gamma(0, t+\varepsilon]$ を考える。これに対応する共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ は次のような合成で与えられる。

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{\gamma(0, t+\varepsilon]}(z) \\ &= \left[g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])} \circ g_t \right](z) = g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])}(g_t(z)). \end{aligned} \tag{3.21}$$





- この共形変換 $g_{t+\varepsilon}(z)$ によって, $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t + \varepsilon]$ は \mathbb{H} に写される.
- しかし, $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t + \varepsilon]$ を $g_{t+\varepsilon}(z)$ ではなく $g_t(z)$ で写すと, 像は \mathbb{H} ではなく $\mathbb{H} \setminus g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])$ となる. これは \mathbb{H} から曲線 $g_t(\gamma(t, t + \varepsilon])$ を除いた領域である.
- この曲線の出発点にあたる実軸上の点を U_t と書くことにする. すなわち

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \quad (3.22)$$

とする. (当然 $U_0 = \gamma(0)$ である.)

- すると, 前節の結果 (3.14) より

$$\begin{aligned} g_{t+\varepsilon}(z) &= g_{g_t(\gamma(t, t+\varepsilon])}(g_t(z)) \\ &= g_t(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}((t, t + \varepsilon])}{(g_t(z) - U_t)^n} \end{aligned} \quad (3.23)$$

という形に書けることになる. ただしここで

$$R_t^\varepsilon = \sup \left\{ |g_t(\gamma(s)) - U_t| : s \in [t, t + \varepsilon] \right\}, \quad (3.24)$$

として,

$$|a_n((t, t + \varepsilon])| \leq c_{n-1} (R_t^\varepsilon)^{n-2} a_2((t, t + \varepsilon]), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.25)$$

である.

- 半平面 capacity の加法性より

$$a_2((t, t + \varepsilon]) = a_2(t + \varepsilon) - a_2(t). \quad (3.26)$$

が導かれる.

以上より

$$\left| g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z) - \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{g_t(z) - U_t} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} (a_2(t+\varepsilon) - a_2(t))$$

という不等式が得られることになる. この両辺を ε で割ると

$$\left| \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} - \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n(R_t^\varepsilon)^{n-1}}{|g_t(z) - U_t|^n} \times \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon}$$

となるが, ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとることにする.

半平面 capacity $a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$ は一般に t について狭義単調増加関数であり連続であるが, さらに微分可能であり

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_2(t+\varepsilon) - a_2(t)}{\varepsilon} = \frac{da_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \text{hcap}(\gamma(0, t]) \quad (3.27)$$

が存在するものと仮定する.

また定義より $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_t^\varepsilon = 0$ であるから, 上の評価より

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g_{t+\varepsilon}(z) - g_t(z)}{\varepsilon} = \frac{\partial g_t(z)}{\partial t}$$

が存在し, これは次の微分方程式を満たすことが結論される.

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{1}{g_t(z) - U_t} \frac{da_2(t)}{dt}, \quad a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t]). \quad (3.28)$$

ただし, 初期条件は $g_0(z) = z$ である.

これをレヴナーの微分方程式 (Loewner differential equation) と言う.

注 3.4. 上の (3.27) のところで, $a_2(t) = \text{hcap}(\gamma(0, t])$ が微分可能であることを仮定した. 一般に $a_2(t)$ は t について狭義単調増加関数であり, 連続であることが示せる. したがって, 曲線 γ を (時刻 t の代わりに) 半平面 capacity そのもので径数付けすることが可能である. 特に通常は

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(a_2^{-1}(2t))$$

とおくことにする. この定義より

$$a_2(t) = \text{hcap}(\bar{\gamma}((0, t])) = 2t \quad (3.29)$$

となるので, レヴナー方程式は

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - U_t}, \quad g_0(z) = z \quad (3.30)$$

となる. (以下では, (3.29) である $\bar{\gamma}$ を改めて γ と記すことにする.) この方程式から生成される g_t を特に **Loewner chains** と呼ぶ. また U_t をレヴナー方程式の駆動関数と呼ぶことにする.

レヴナー方程式に展開式 (3.14) を代入すると、展開係数 $a_n(t)$ に対して階層的な方程式系が得られる:

$$\frac{d}{dt}a_n(t) = 2\mathcal{P}_n(a_1(t), a_2(t), \dots), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.31)$$

ただし

$$a_1(t) = -U_t \quad (3.32)$$

とした。また $\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \dots)$ は次式で与えられる多項式である (ただし $\mathcal{P}_2 = 1$ とする):

$$\mathcal{P}_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\mathbf{m}:|\mathbf{m}|=n-2} (-1)^{\ell(\mathbf{m})} \prod_{j=1}^{\ell(\mathbf{m})} x_{m_j}. \quad (3.33)$$

ここで右辺は $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots)$, $m_j \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ に対する和であり, $\ell(\mathbf{m}) \equiv \mathbf{m}$ の成分の数, $|\mathbf{m}| \equiv \sum_{j=1}^{\ell(\mathbf{m})} m_j$ である。これは、次の漸化式によっても与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= 0, & \mathcal{P}_2 &= 1, \\ \mathcal{P}_n &= -\sum_{j=1}^{n-2} x_j \mathcal{P}_{n-j}, & n &\geq 2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

具体的には

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_2(t) &= 2, \\ \frac{d}{dt}a_3(t) &= -2a_1(t), \\ \frac{d}{dt}a_4(t) &= 2\{(a_1(t))^2 - a_2(t)\}, \\ \frac{d}{dt}a_5(t) &= 2\{- (a_1(t))^3 + 2a_2(t)a_1(t) - a_3(t)\}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

である。 $g_0(z) = z$ なので $a_n(0) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ である。駆動関数 $a_1(t) = -U_t$ が与えられると、上の方程式系によりすべての展開係数 $a_n(t)$, $n = 2, 3, \dots$ が決まり、共形変換 $g_t(z)$ が定まることになる。つまり、レヴナー方程式は無数個の階層的な微分方程式系と等価であることになる。