

# 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部 香取眞理 (かとりまこと)

## Section 3.B

Summer School 数理物理2009 「ベキ乗則の数理」

2009年8月27 - 30日

東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

## 3.4 SLE と BES<sub>d</sub>

Schramm は, レヴナー方程式の駆動関数として

$$U_t = \sqrt{\kappa} B_t, \quad \kappa > 0, \quad B_0 = 0 \quad (3.36)$$

とした. ここで  $B_t$  は 1 次元標準 BM である

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z. \quad (3.37)$$

BM のスケールリング性より

$$U_t \stackrel{d}{=} B_{\kappa t}$$

である. つまり, 径数  $\kappa$  は BM の一様な時間変更を表す.

この初期値問題の解として得られる (時刻  $t \geq 0$  で径数付けされる) 共形変換の族  $\{g_t\}_{t \geq 0}$  を提案者 **Schramm** の名前を冠して (**chordal**) シュラム・レヴナー発展 (**Schramm-Loewner evolution**) と呼ぶ. 以下ではこれを, 径数  $\kappa$  も付して,  $SLE_\kappa$  と略記する.

3.2 節と 3.3 節では, 時間  $t \in [0, \infty)$  とともに単調に伸びていく単純曲線  $\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \infty)\}$  を与え, 各時刻  $t \in [0, \infty)$  で  $\mathbb{H} \setminus \gamma(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$  となる共形変換  $g_t(z)$  を求める問題を考えた.  $g_t(z)$  はレヴナー方程式 (3.30) の解として与えられることが分かった. この方程式は

$$U_t = \lim_{s \nearrow t} g_s(\gamma(t)) \quad (3.38)$$

で駆動される形をしていた.

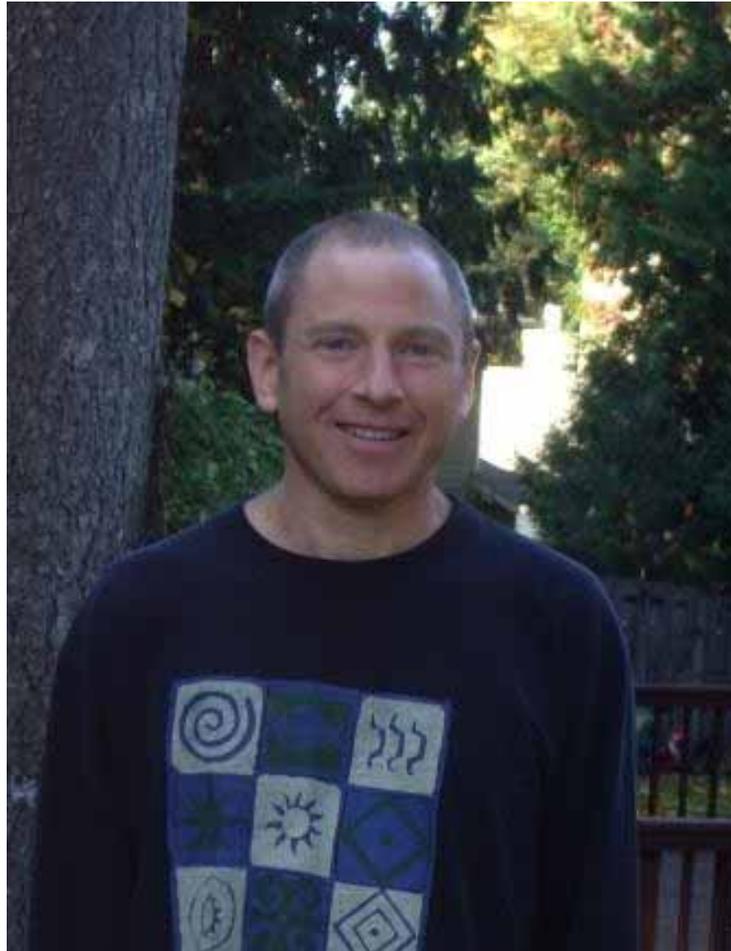
これに対して, ここでは  $U_t$  を確率過程 (3.36) として与え, 確率的なレヴナー方程式 (3.37) を解くことにより, ランダムに時間発展する共形変換  $g_t(z)$  を求める問題を考えるのである. この場合にも, (3.38) によって  $\gamma(t), 0 \leq t < \infty$  が定められることになる.

Loewner : 曲線  $\gamma(0, t]$   $\implies$  共形変換  $g_t$   $\implies U_t = g(\gamma(t))$

Schramm : **逆問題**  $U_t$   $\implies$  共形変換  $g_t$   $\implies$  曲線  $\gamma(0, t]$

ランダムネス  $U_t$  : 確率過程  $\implies$  共形変換  $g_t$  の統計集団

$\implies$  曲線  $\gamma$  の統計集団  $\iff$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}$



**Oded Schramm** (December 10, 1961 in Jerusalem, Israel  
– September 1, 2008, Washington State, USA)

次が知られている.

**定理 3.2**  $SLE_\kappa$  で定められる  $\gamma$  は, 確率 1 で曲線である.

**注 3.5.** 上の主張は, 「確率 1 で,  $SLE_\kappa$  は曲線によって生成される」という言い方でも表現される. また  $\gamma$  は,  $SLE_\kappa$  の道 ( $SLE_\kappa$  path), または  $SLE_\kappa$  曲線 ( $SLE_\kappa$  curve) と呼ばれる. これは, ある確率法則に従うランダムな曲線である. 定理 3.2 の証明は実は難しいのでここでは述べない. 文献

G. F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*,  
(American Mathematical Society, 2005).

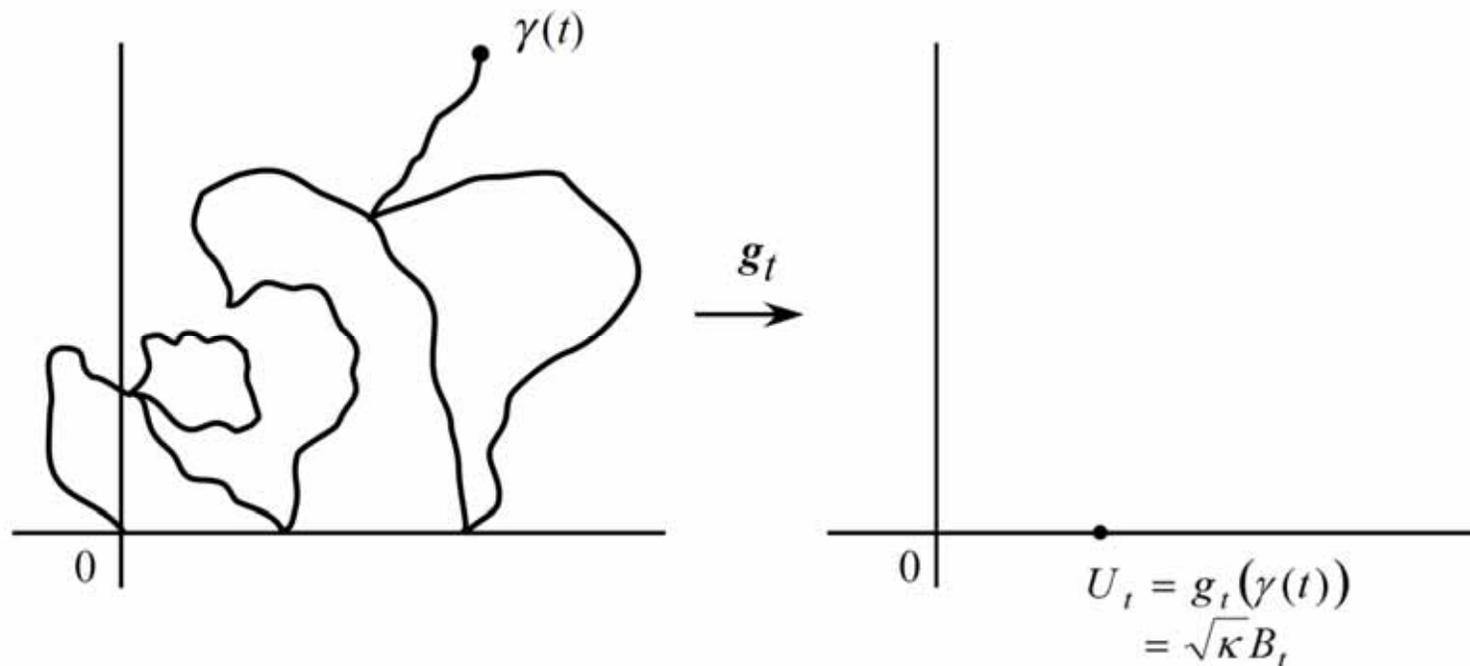
を参照せよ.

$SLE_\kappa$   $\gamma$  は一般には単純曲線ではない。以下,

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0, t] \text{ の非有界な連結領域} \\ K_t &= \mathbb{H} \setminus H_t \end{aligned} \tag{3.39}$$

とする。

- $K_t$  は  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma[0, t]$  の hull と呼ばれる。
- $g_t(z)$  は  $H_t \rightarrow \mathbb{H}$  の共形変換である。つまり  $H_t$  は写像  $g_t$  の定義域である。他方,  $K_t$  に対しては,  $g_t$  は定義されないことになる。

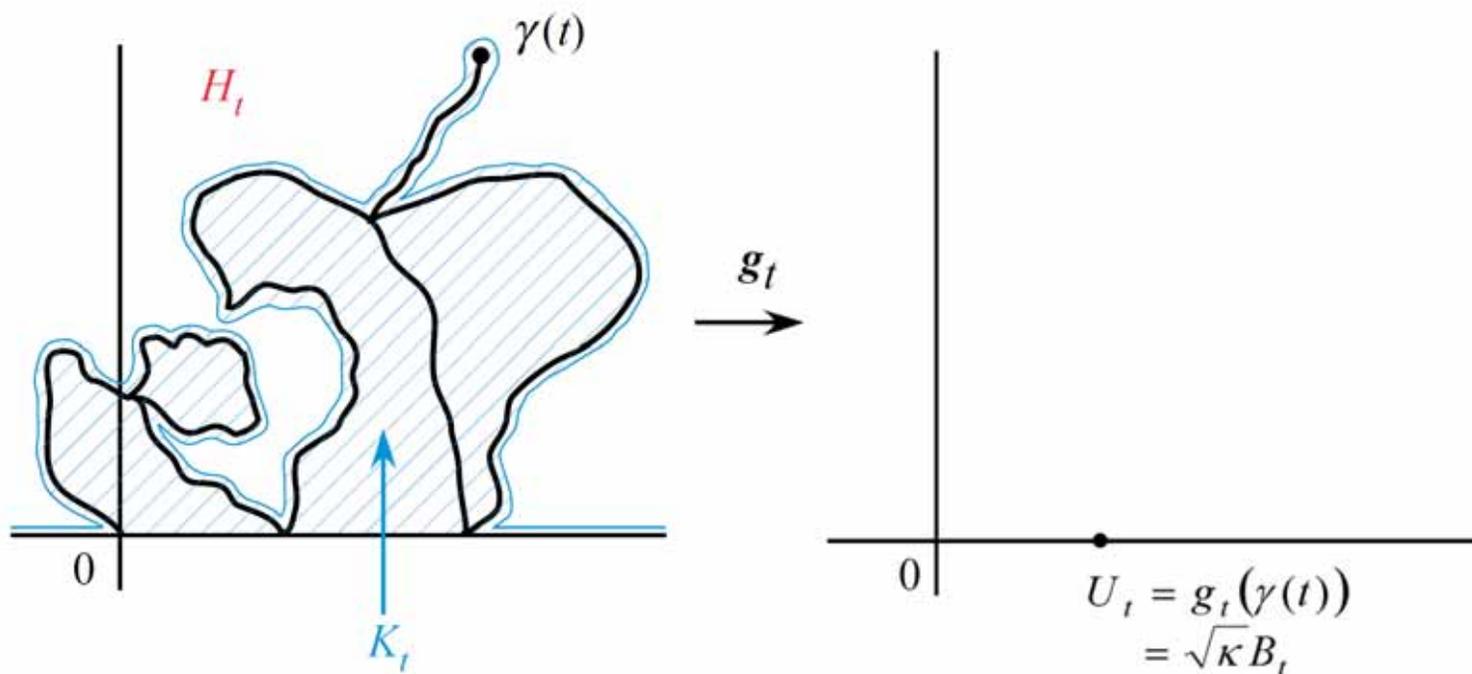


$SLE_\kappa$   $\gamma$  は一般には単純曲線ではない。以下,

$$\begin{aligned} H_t &= \mathbb{H} \setminus \gamma[0, t] \text{ の非有界な連結領域} \\ K_t &= \mathbb{H} \setminus H_t \end{aligned} \tag{3.39}$$

とする。

- $K_t$  は  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma[0, t]$  の hull と呼ばれる。
- $g_t(z)$  は  $H_t \rightarrow \mathbb{H}$  の共形変換である。つまり  $H_t$  は写像  $g_t$  の定義域である。他方,  $K_t$  に対しては,  $g_t$  は定義されないことになる。



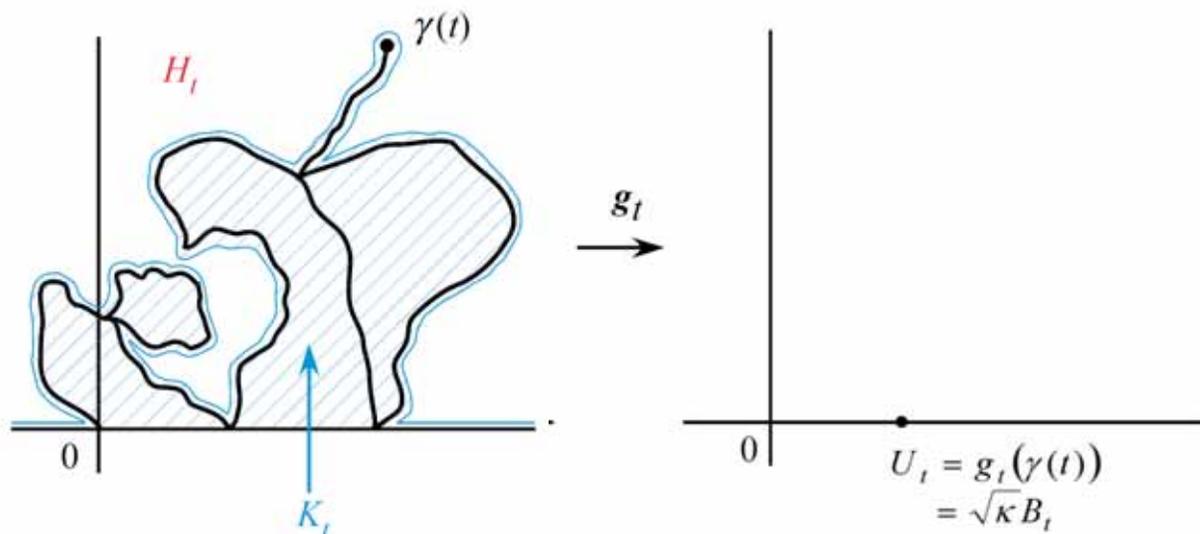
- SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma$  は時間  $t$  とともに単調に伸びていくものとするとき、hull  $K_t$  も単調に増大していくことになる。よって  $g_t$  の定義域  $H_t$  は単調に減少していくことになる。
- 各  $z \in \mathbb{H}$  に対して

$$\begin{aligned} T_z &= \sup \left\{ t \geq 0 : \text{解 } g_t(z) \text{ が well-defined で } g_t(z) \in \mathbb{H} \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0 : z \in K_t \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

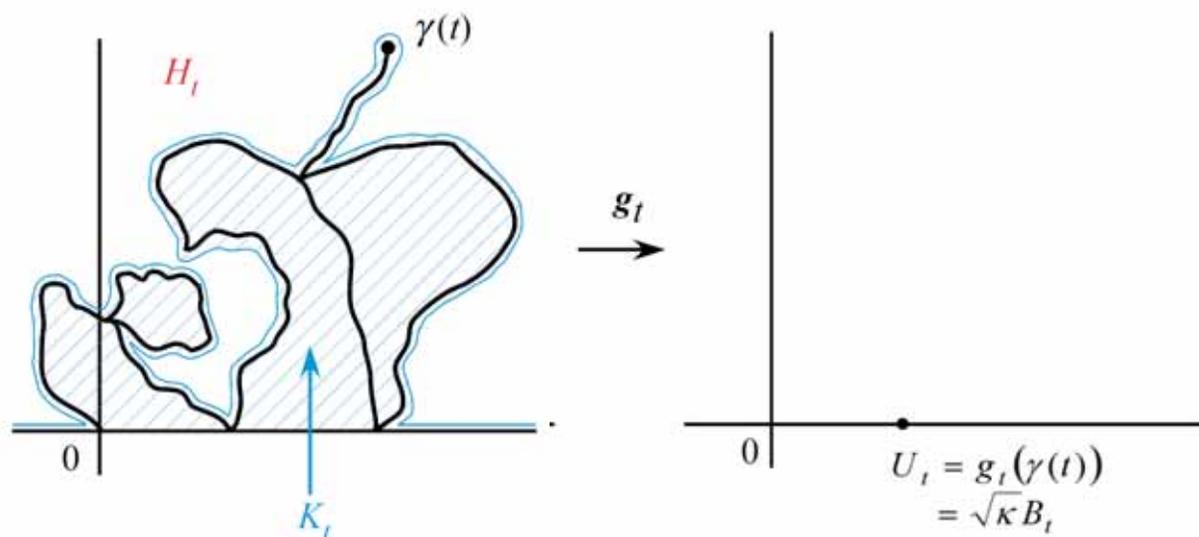
が定義される。これを用いると

$$\begin{aligned} H_t &= \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z > t \right\} \\ K_t &= \left\{ z \in \mathbb{H} : T_z \leq t \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

と表せる。



- $g_t(z)$  の定義域  $H_t$  の境界を  $\partial H_t$  と書き, **pioneer point** を  $H_t^{\text{pion}} = \bigcup_{0 \leq s \leq t} \partial H_s$  で定義する. SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma$  は,  $\gamma(0) \in \mathbb{R}$  で  $H_t^{\text{pion}} = \mathbb{R} \cup \gamma(0, t]$  となるものである.



SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma = \{\gamma(t) : 0 \leq t < \infty\}$  が与えられたとする. このとき, 各時刻  $s \geq 0$  に対して,  $\gamma^s$  を

$$\gamma^s(t) = g_s(\gamma(t+s)) - \sqrt{\kappa}B_s, \quad t \geq 0$$

で与えられる曲線であるとする. このとき,

$$\gamma^s \stackrel{d}{=} \gamma \quad \forall s \geq 0 \tag{3.42}$$

が成り立つことになる. この意味で SLE $_{\kappa}$  はマルコフ性をもつことになる.

2.3 節で, BM のスケールリング性が  $BES_d$  に遺伝することを見たが, 同様にこれは  $SLE_\kappa$  にも遺伝する. 以下を  $SLE_\kappa$  のスケールリング性と呼ぶことにする.

**命題 3.3** 任意の  $r > 0$  に対して

$$\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) \stackrel{d}{=} g_t(z) \quad (3.43)$$

が成り立つ. すなわち,  $\tilde{\gamma}(t) \equiv \frac{1}{r} \gamma(r^2 t)$  とすると

$$\tilde{\gamma} \stackrel{d}{=} \gamma \quad (3.44)$$

である.

証明.  $\tilde{g}_t(z) = \frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz)$  とおく. まず初期値は  $\tilde{g}_0(z) = \frac{1}{r} g_0(rz) = \frac{1}{r} \times rz = z$  なので,  $\tilde{g}_0(z) = g_0(z) = z$  であり, 一致している.  $\tilde{B}_t = \frac{1}{r} B_{r^2 t}$  とすると,  $\tilde{g}_t(z)$  の従う方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{g}_t(z) &= \frac{1}{r} \times \frac{d}{dt} g_{r^2 t}(rz) \\ &= \frac{1}{r} \times \frac{2r^2}{g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa} B_{r^2 t}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{r} g_{r^2 t}(rz) - \sqrt{\kappa} \frac{1}{r} B_{r^2 t}} \\ &= \frac{2}{\tilde{g}_t(z) - \sqrt{\kappa} \tilde{B}_t} \end{aligned}$$

である. BM のスケールリング性より  $\tilde{B}_t \stackrel{d}{=} B_t$  なので,  $\tilde{g}_t(z)$  も  $g_t(z)$  と同じ  $SLE_\kappa$  であることになる. 従って, 分布は等しい. ■

$$\hat{g}_t(z) = \frac{g_t(z) - \sqrt{\kappa}B_t}{\sqrt{\kappa}} \quad (3.45)$$

とすると,  $\hat{g}_t(z)$  は次の確率微分方程式を満たすことになる.

$$d\hat{g}_t(z) = \frac{2/\kappa}{\hat{g}_t(z)} dt + dW_t, \quad \hat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t. \quad (3.46)$$

$T_z$  の定義 (3.40) より,  $\text{SLE}_\kappa$  曲線  $\gamma$  は時刻  $t = T_z$  で初めて  $z \in \mathbb{H}$  に到達する. つまり  $\lim_{t \nearrow T_z} \gamma(t) = z$  であり, この先端  $\gamma(t)$  の像は  $\sqrt{\kappa}B_{T_z}$  であるから, (3.45) より

$$\lim_{t \nearrow T_z} \hat{g}_t(z) = 0$$

となる.

つまり,  $T_z$  は  $z/\sqrt{\kappa}$  から出発して SDE (3.46) に従って動く  $\overline{\mathbb{H}}$  上の点が, 初めて原点 0 に到達する時刻ということになる.

特に SDE

$$d\hat{g}_t(z) = \frac{2/\kappa}{\hat{g}_t(z)} dt + dW_t, \quad \hat{g}_0(z) = \frac{z}{\sqrt{\kappa}}, \quad W_t = -B_t.$$

式で  $z \rightarrow x \in \mathbb{R}$  としてみると, 注 3.1 で述べたように  $g_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$  なので  $\hat{g}_t(x) \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$  である. したがって,  $\text{SLE}_\kappa$  を実軸上で考えたものは,  $\text{BES}_d$

$$dX_t^x = \frac{d-1}{2} \frac{1}{X_t^x} dt + dW_t, \quad X_0^x = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (3.47)$$

で

$$\kappa = \frac{4}{d-1} \iff d = \frac{4}{\kappa} + 1 \quad (3.48)$$

とおいたものに等しい.

このときには, 明らかに  $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t^x = 0\}$  であり, 2.3 節では, この値の次元  $d$  依存性を詳しく議論したのであった.

各  $x$  に対して同じ BM,  $W_t$  をとることにする.  $x < y$  なら  $X_t^x < X_t^y, \forall t < T_x$  なので,  $T_x \leq T_y$  である. 2.3 節の定理 2.2 と 定理 2.3 では次を証明した.

- (1)  $d \geq 2$  のとき, 確率 1 で  $T_x = \infty, \forall x > 0$ .
- (2)  $1 \leq d < 2$  のとき, 確率 1 で  $T_x < \infty, \forall x > 0$ .
- (2a)  $\frac{3}{2} < d < 2$  のとき,  $0 < x < y$  に対して,  $\mathbb{P}\{T_x = T_y\} > 0$ .
- (2b)  $1 \leq d \leq \frac{3}{2}$  のとき,  $0 < x < y$  ならば確率 1 で  $T_x < T_y$ .

これに対応して,  $\text{SLE}_\kappa$  で生成される曲線  $\gamma$  には, 径数  $\kappa$  の値に応じて, 次のような 3 つの相があることが導かれる.

**定理 3.4** (i)  $0 < \kappa \leq 4$  のとき,  $\gamma$  は単純曲線であり,  $\gamma(0, \infty) \subset \mathbb{H}$  である. また, このとき確率 1 で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = \infty. \quad (3.49)$$

(ii)  $4 < \kappa < 8$  のとき,  $\gamma$  は自分自身や実軸と接することがあるが, 確率 1 で

$$\bigcup_{t>0} \overline{K_t} = \overline{\mathbb{H}} \quad (3.50)$$

である. よって,  $|\gamma(t)| \rightarrow \infty$  である. しかし

$$\gamma[0, \infty) \cap \mathbb{H} \neq \mathbb{H} \quad (3.51)$$

である. つまり,  $\mathbb{H}$  全体を埋めつくすことはない.

(iii)  $\kappa \geq 8$  のとき,  $\gamma$  は  $\overline{\mathbb{H}}$  のすべての点を埋めつくす:

$$\gamma[0, \infty) = \overline{\mathbb{H}}. \quad (3.52)$$

# SLE 曲線の 3相 (3態)

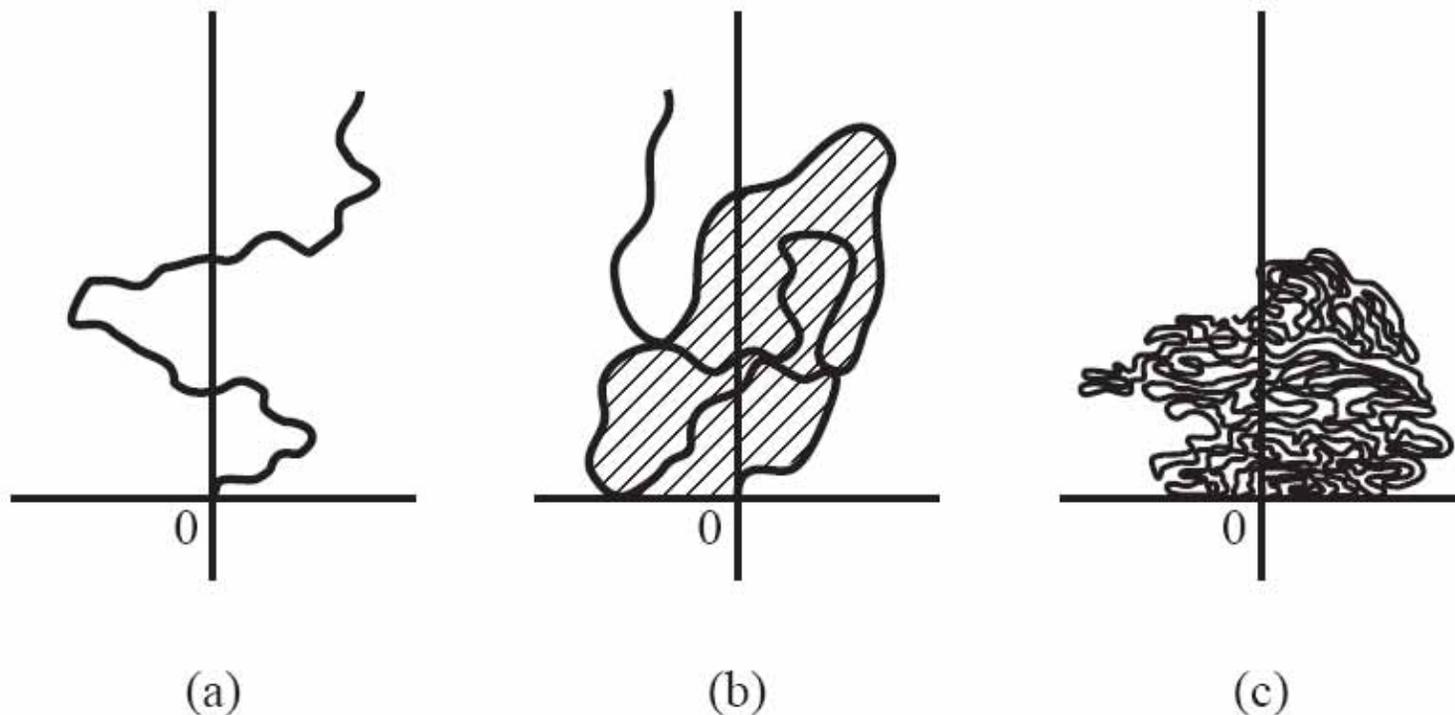
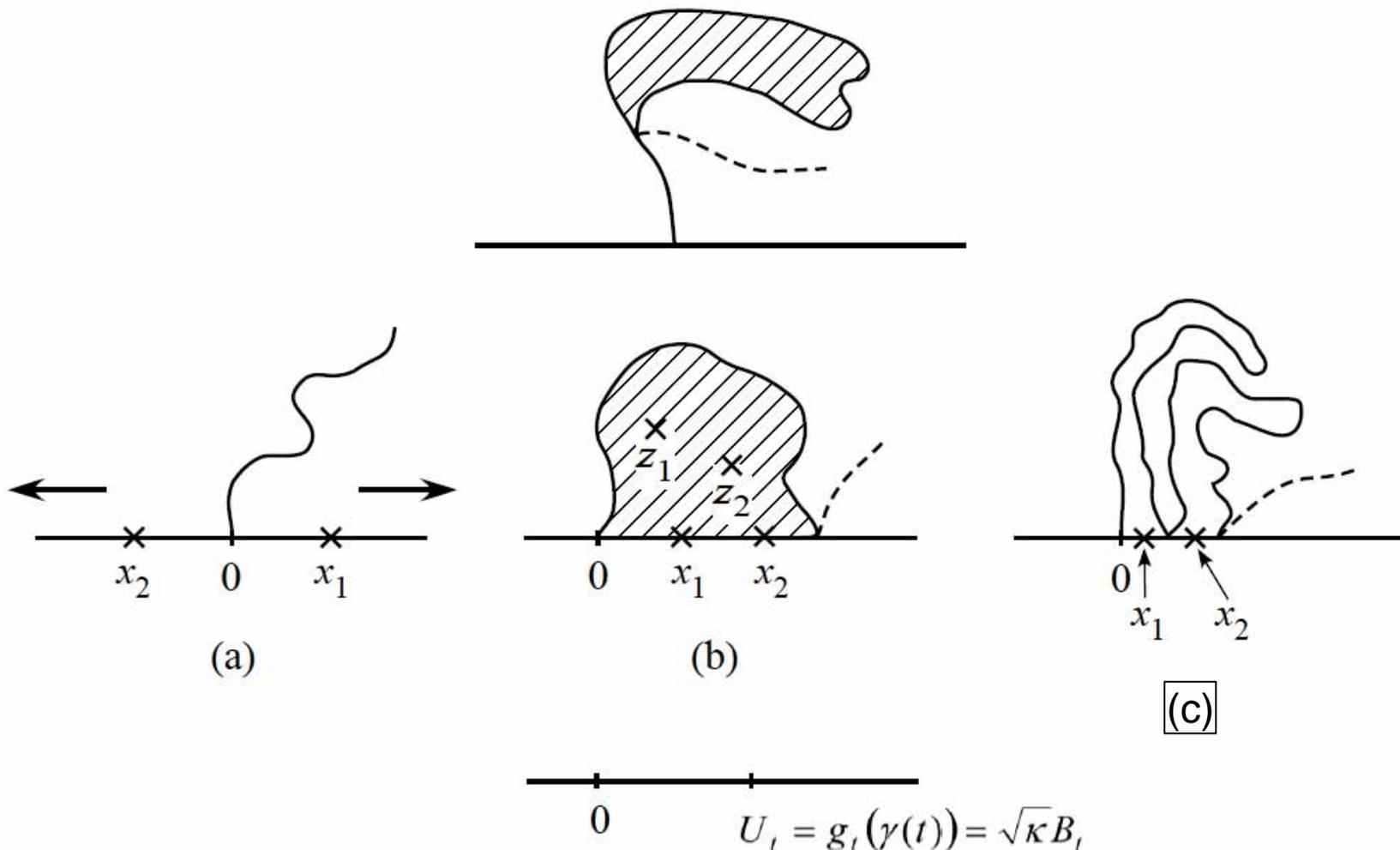
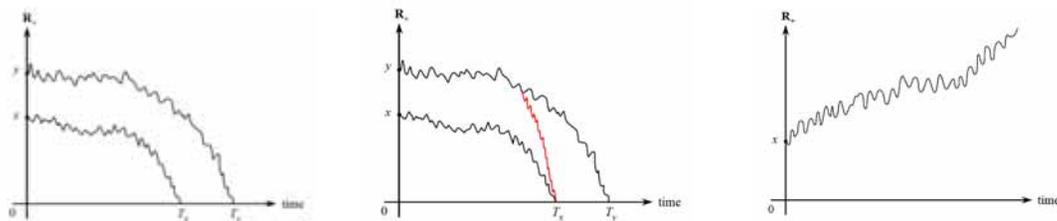


図 2: (a) 単純曲線.  $0 < \kappa \leq 4$  のときの SLE 曲線の様子. (b) 自分自身や実軸に接するが交わることはない曲線. 曲線が伸びていくと, 曲線で囲まれた領域 (斜線部分) は上半平面を覆いつくしていくが, 曲線自身で半平面が埋めつくされることはない.  $4 < \kappa < 8$  のときの SLE 曲線の様子. (c) 上半平面を埋めつくしていく曲線.  $\kappa \geq 8$  のときの SLE 曲線の様子.



**(b) の場合:**  $(t)$  が実軸  $\mathbb{R}$  と接した瞬間に、斜線領域内の点はすべて同時に**呑み込まれて(swallowed)**、 $(t)$  とともに  $U_t$  に写されてしまう。

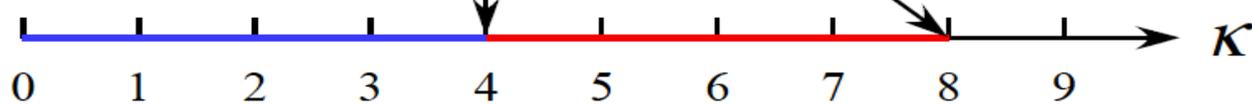
**(c) の場合:** には隙間はなく、実軸上の点  $x_1, x_2, \dots$  は原点に近いものから順に  $U_t$  に写されていく。



$$d\hat{g}_t(x) = dB_t + \frac{2}{\kappa} \frac{dt}{\hat{g}_t(x)}$$



$$dX_t^x = dB_t + \frac{d-1}{2} \frac{dt}{X_t^x}$$



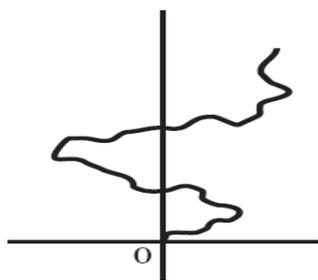
$$\frac{2}{\kappa} = \frac{d-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

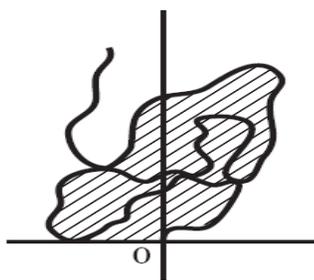
$$\kappa = \frac{4}{d-1}$$

$$\Leftrightarrow$$

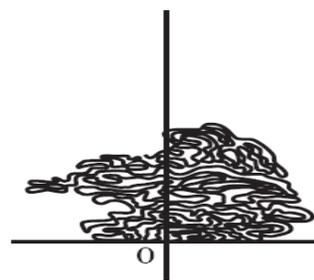
$$d = \frac{4}{\kappa} + 1$$



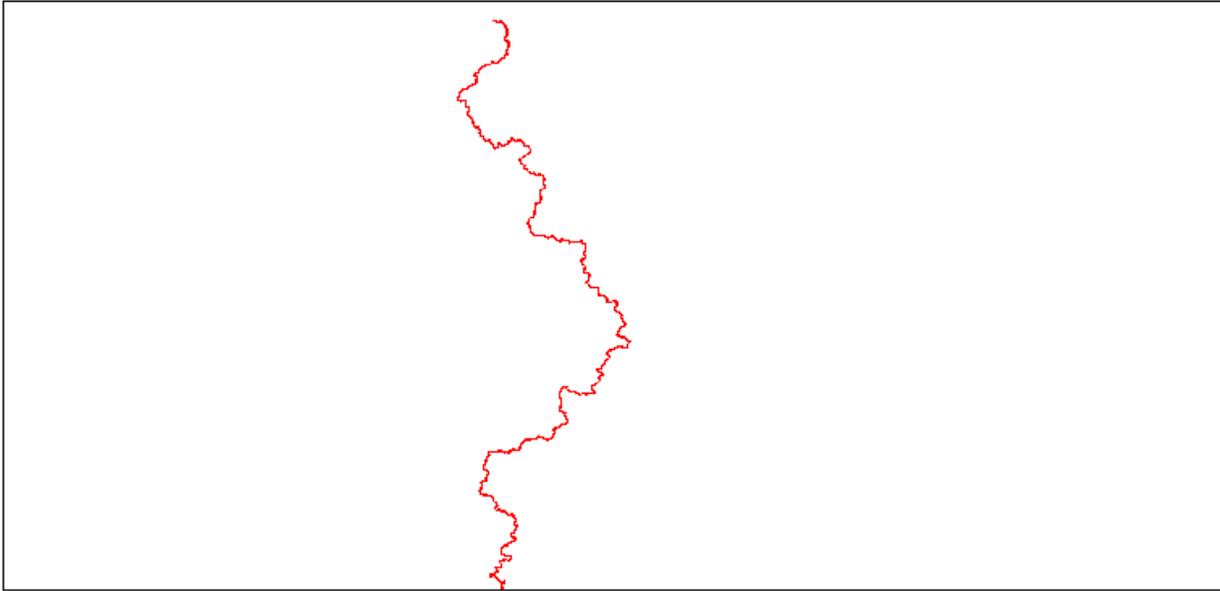
(a)



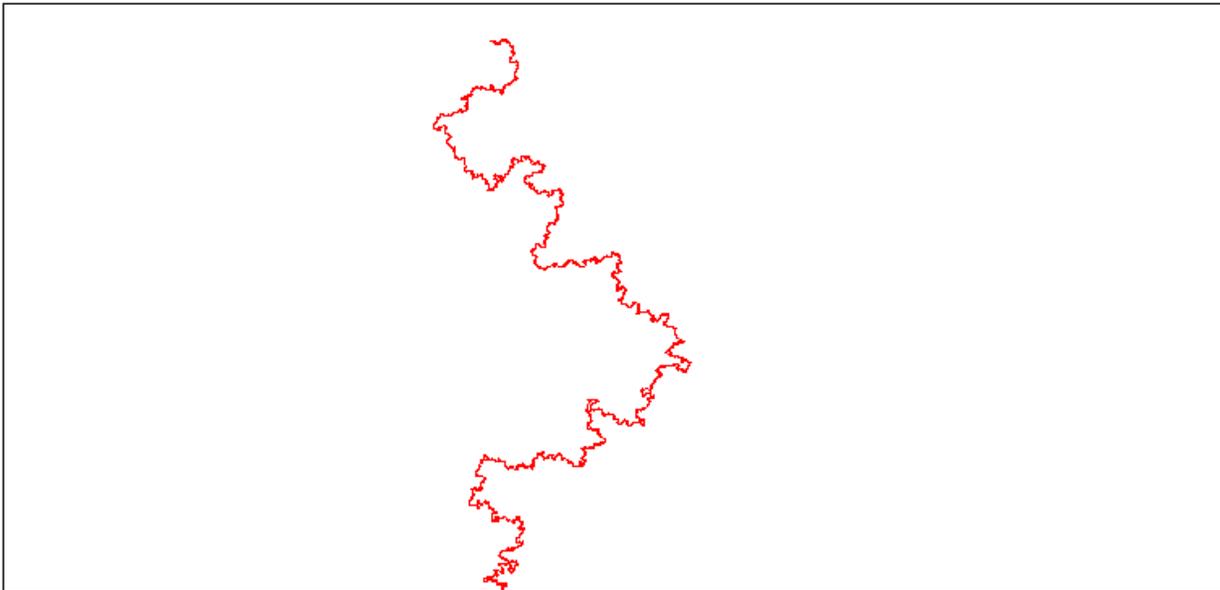
(b)



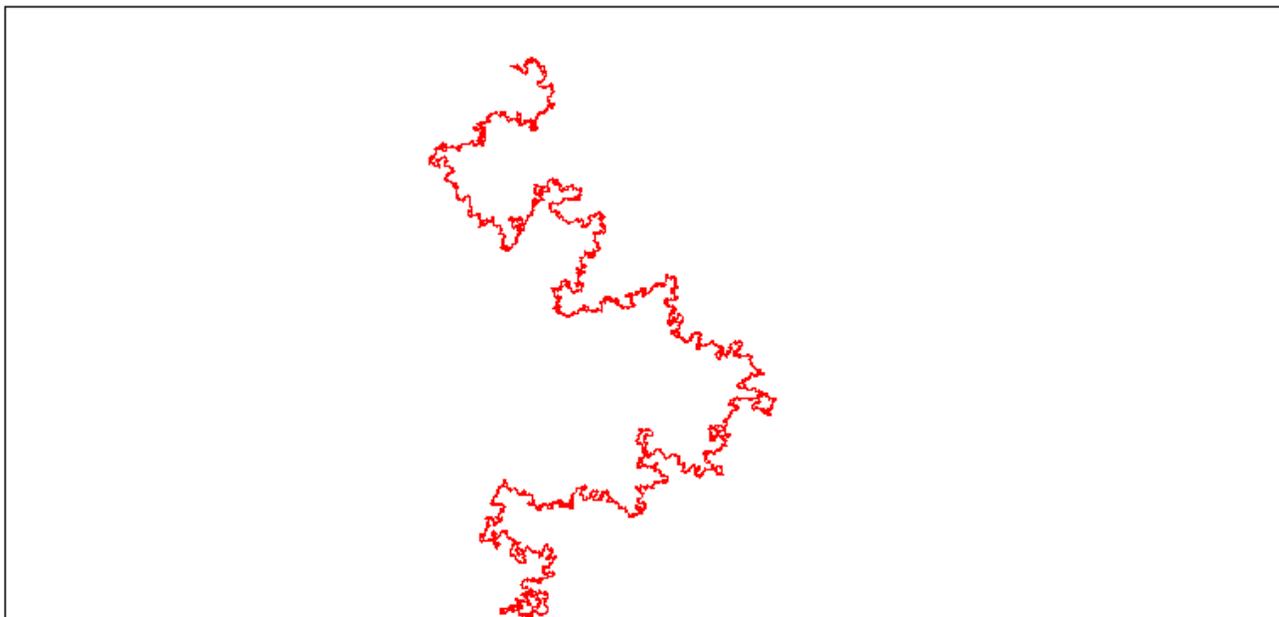
(c)



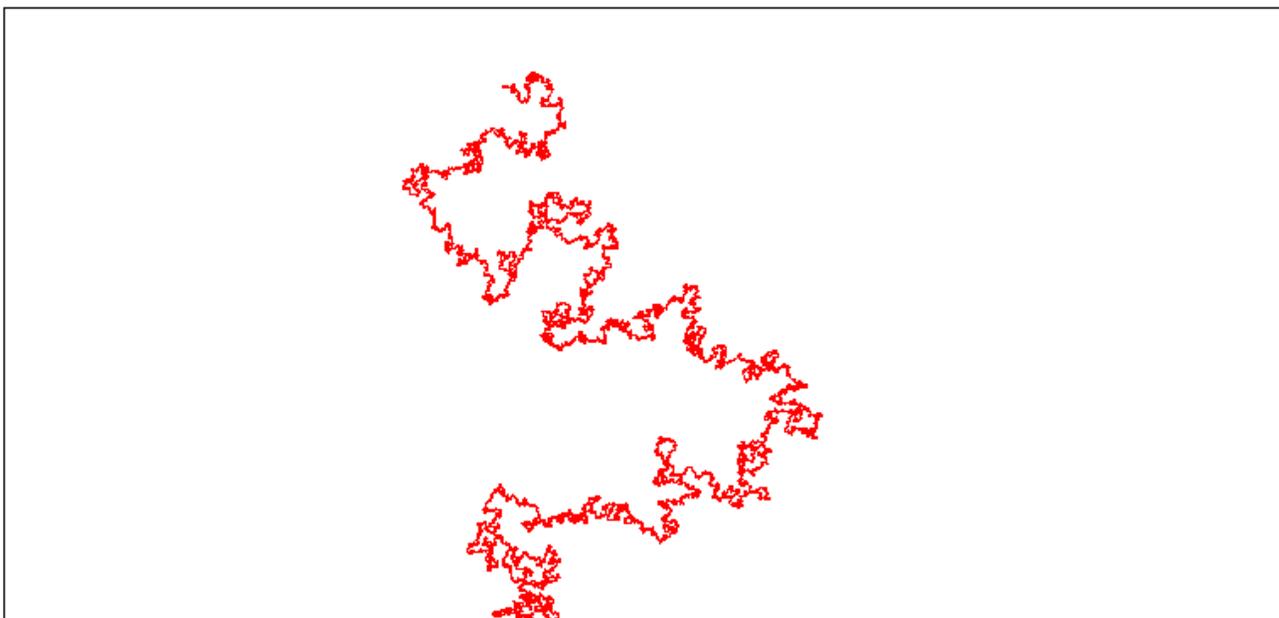
$$\kappa = 1.0$$



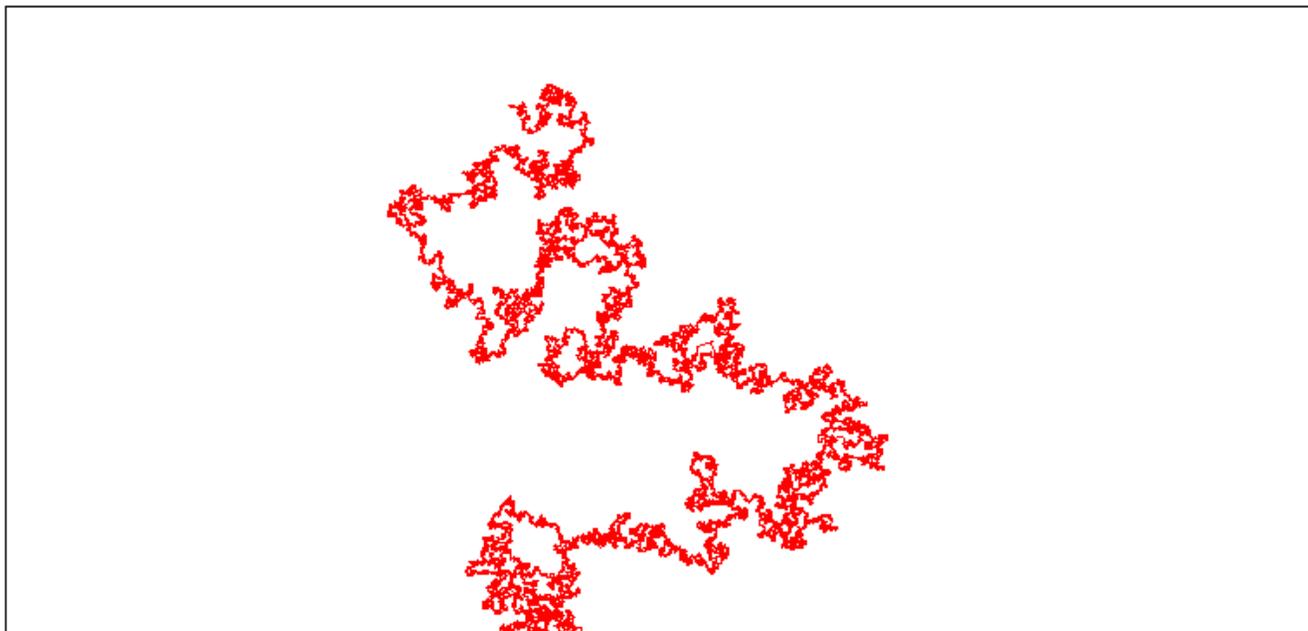
$$\kappa = 2.0$$



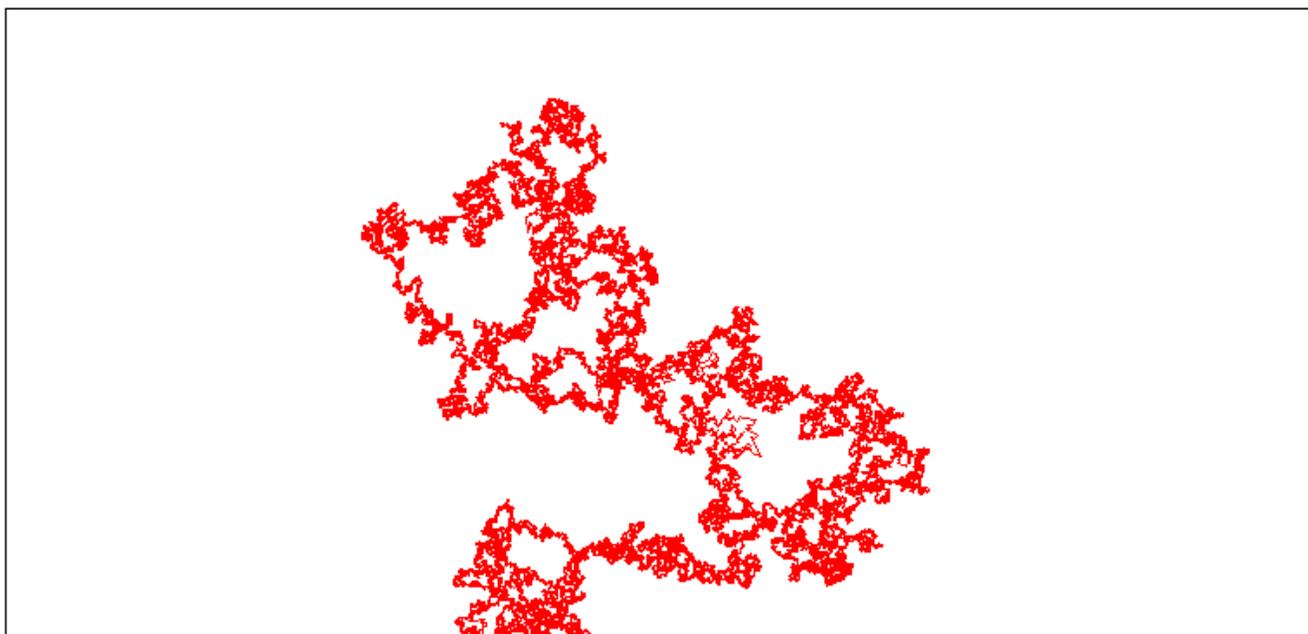
$$\kappa = 3.0$$



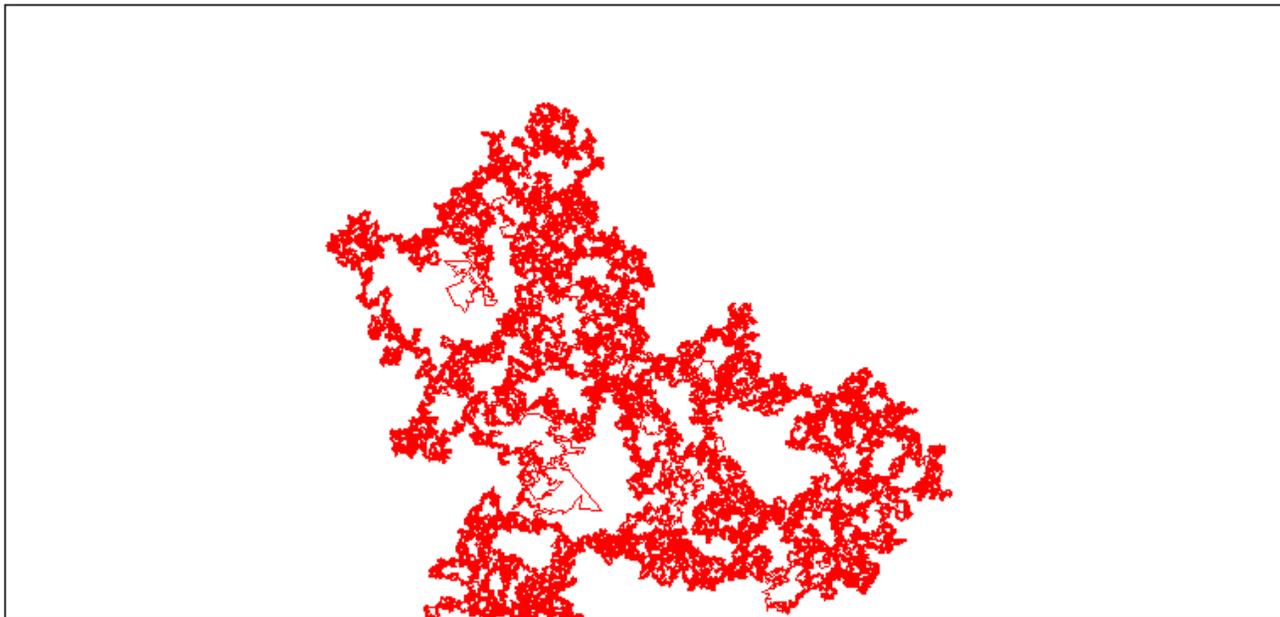
$$\kappa = 4.0$$



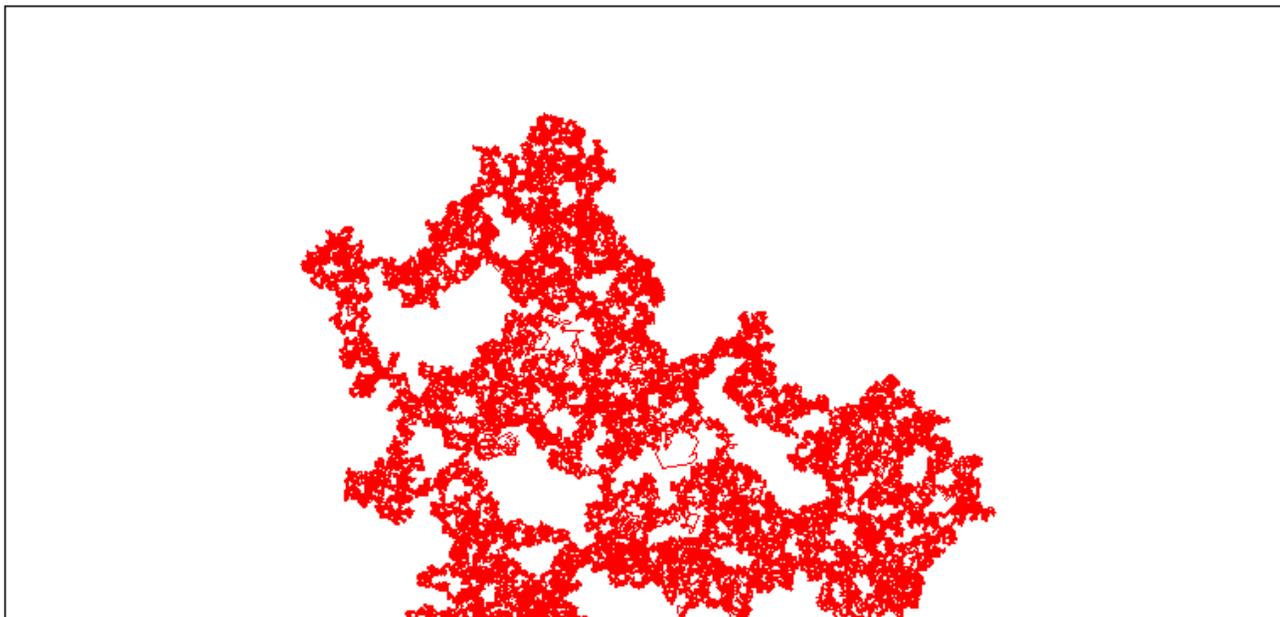
$$\kappa = 5.0$$



$$\kappa = 6.0$$



$$\kappa = 7.0$$



$$\kappa = 8.0$$