

# 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部 香取眞理 (かとりまこと)

## Section 4.A

Summer School 数理物理2009 「ベキ乗則の数理」

2009年8月27 - 30日

東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

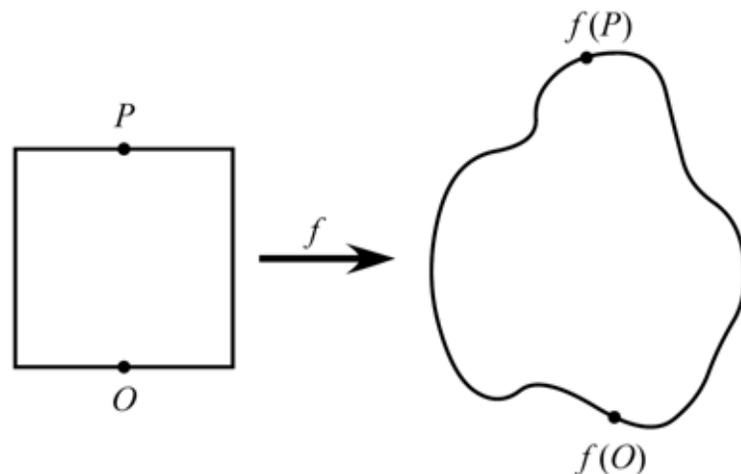
# 4 SLE と物理系との対応

## 4.1 Schramm のアイデア

$f : D_0 \subset \mathbb{C}$  上で正則,  $f'(z) \neq 0, \forall z \in D_0$  のとき

$f : D_0 \rightarrow f(D_0) : \text{共形変換 (等角写像)}$

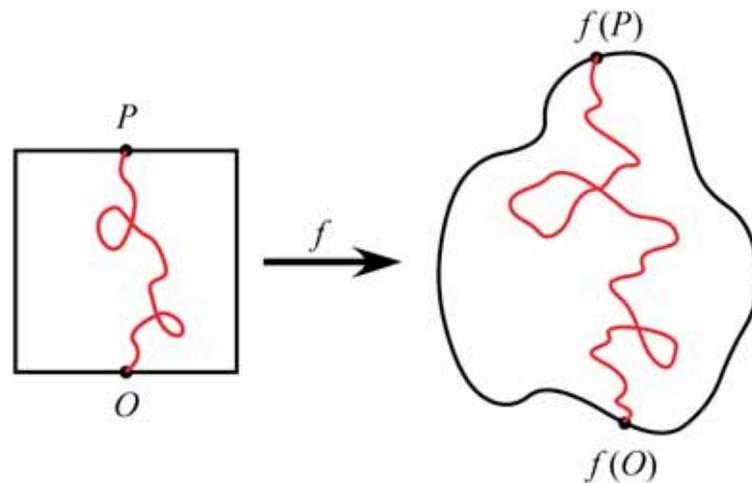
ただし,  $\partial D_0 \rightarrow f(\partial D_0), O \rightarrow f(O), P \rightarrow f(P)$  とする.



1.1 節で述べた平面格子上的統計力学模型の連続極限に伴って得られる連続関数  $\gamma$  に対する測度

$$\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = C(D_0; O, P) \mu_{(D_0; O, P)}(\cdot)$$

の共形変換  $f$  による変換性を考える.



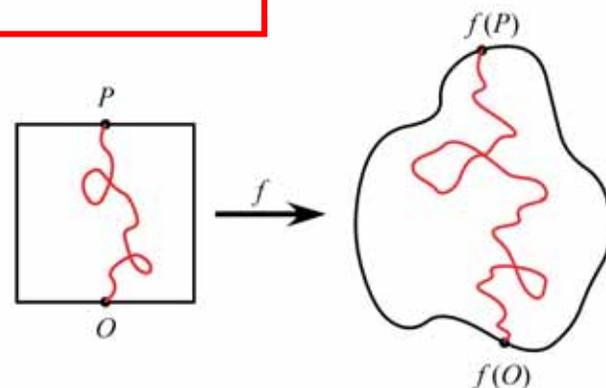
次の2つの変換性を持つことが期待される。

## 共形共変性と共形不変性

任意の共形変換に対して,

$$f \circ \bar{\mu}_{(D_0; O, P)}(\cdot) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b \bar{\mu}_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot)$$

指数  $b$  = 1.1 節の格子上的模型の分配関数の  
 領域サイズ  $N \rightarrow \infty$  に伴う漸近挙動で決まる値  
 = (上の式の形から) **境界スケーリング指数**  
 (boundary scaling exponent) と呼ばれる



上式は測度の総和 (分配関数) の**共形共変性**と  
 確率測度の**共形不変性**を意味する：

$$C(D_0; O, P) = |f'(O)|^b |f'(P)|^b C(f(D_0); f(O), f(P)),$$

$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot) = \mu_{(f(D_0); f(O), f(P))}(\cdot).$$

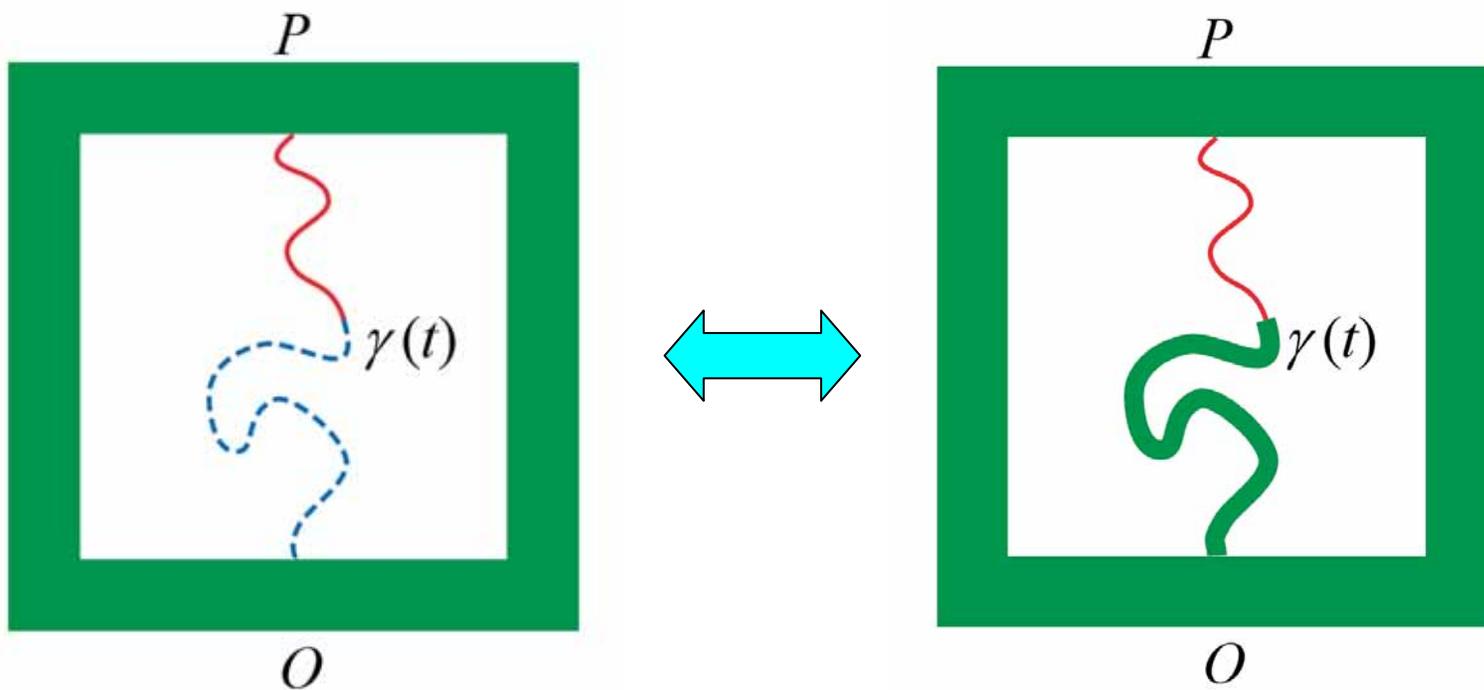
# 領域 Markov 性

$\mu_{(D_0; O, P)}$  の下で、曲線  $\gamma$  の初期の一部分  $\gamma(0, t], t \in (0, t_\gamma)$  を観測する。

この条件の下での曲線の残りの部分の分布は、 $D_0$  から  $\gamma(0, t]$  を除いた開領域で、 $\gamma(t)$  を出発点として  $\gamma(t_\gamma) = P$  を終点とする曲線の分布に等しい：

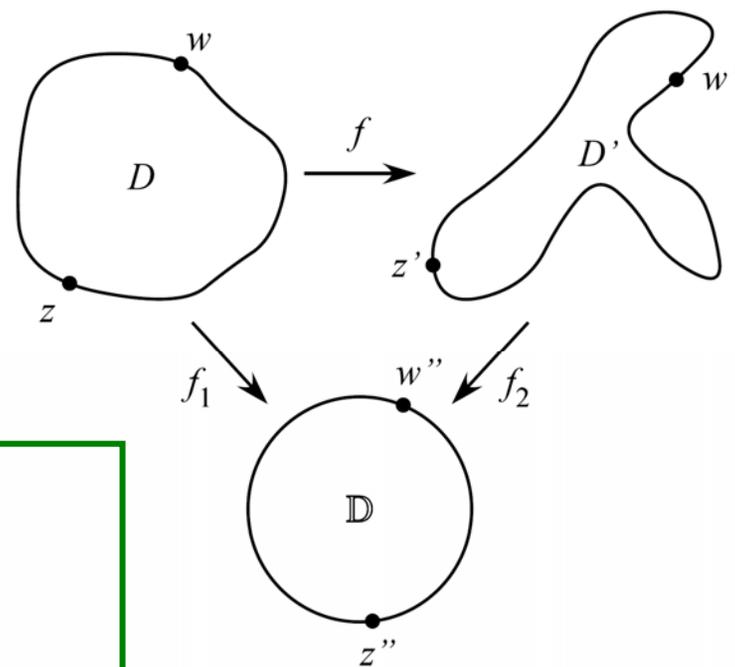
$$\mu_{(D_0; O, P)}(\cdot \mid \gamma(0, t]) = \mu_{(D_0 \setminus \gamma(0, t]; \gamma(t), P)}(\cdot).$$

この性質を領域 Markov 性と言う。



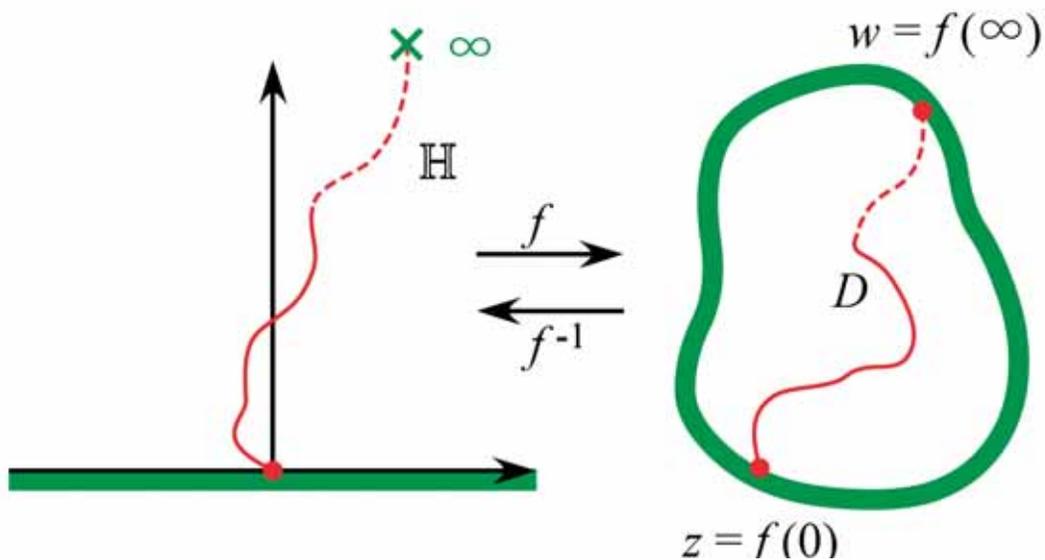
$D, D' : \mathbb{C}$  上の単連結領域 (ただし,  $D, D' \neq \mathbb{C}$ )

$$z, w \in \partial D, \quad z', w' \in \partial D'$$



### Riemann の写像定理

- $f : D \rightarrow D', f(z) = z', f(w) = w'$   
となる共形変換の 1 径数族が存在する.
- さらに  $f'(w) = 1$  という条件を課すと, 共形変換は一意的に定まる.



- $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  : 上半平面
- 共形不変な確率測度  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$   
 $\implies$  任意の単連結領域  $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ ,  
 $z, w \in \partial D$  に対する  
 確率測度  $\mu_{(D;z,w)}$  が得られる

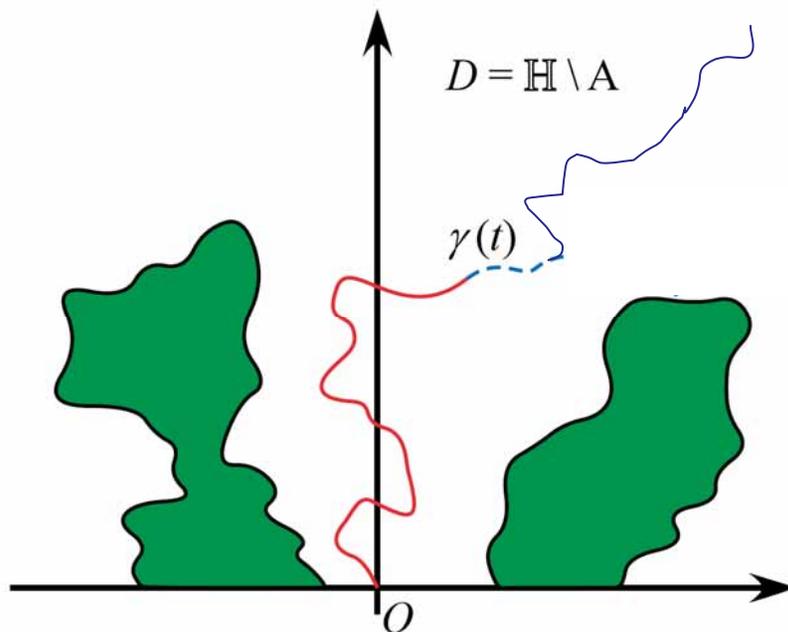
共形変換不変な測度の族  $\{\mu_{(D;z,w)}\}$  の代表元として  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  を考える.



**Oded Schramm** (December 10, 1961 in Jerusalem, Israel  
– September 1, 2008, Washington State, USA)

- 共形不変な確率測度  $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  が与えられれば, 任意の単連結領域  $D \subset \mathbb{C}, D \neq \mathbb{C}$ ,  $z, w \in \partial D$  に対する確率測度  $\mu_{(D;z,w)}$  が得られることになる.
- $\mathbb{H} \setminus D$  が有界である単連結領域  $D \subset \mathbb{H}$  に対して  $w = f(w) = \infty$  とすると, 条件  $|f'(w)| = 1$  より  $w' \rightarrow \infty$  で  $f(w') \sim w'$  となる. このような状況では, 共形共変性は次式で表される:

$$f \circ \bar{\mu}_{(D;z,\infty)}(\cdot) = |f'(z)|^b \bar{\mu}_{(f(D);f(z),\infty)}(\cdot), \quad z \in \partial D. \quad (4.1)$$



O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118** (2000) 221-228.

Schramm のアイデアは、ある確率過程  $U_t$  を駆動関数とするレヴナー方程式を考え、これに伴う曲線  $\gamma$  の分布関数として、 $\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  を定めるというものであった。

$\mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}$  が共形不変性と領域マルコフ性を持つということから、 $\gamma(0, t]$  は独立定常増分を持つことが結論される。

これに対応して、レヴナー方程式の駆動関数  $U_t$  も独立定常分布を持つことが要請される。すなわち

$$[\mathbf{A}] \quad U_t \perp (U_{t+s} - U_t), \quad \forall s, t > 0$$

$$[\mathbf{B}] \quad (U_{t+s} - U_t) \stackrel{d}{=} U_s, \quad \forall s, t > 0$$

とすべきであることになる。

Schramm はさらに

[C]  $U_t$  は連続な確率過程である

という要請を置いた. これから一般に,  $c_1, c_2$  を定数として

$$U_t = c_1 B_t + c_2 t$$

が結論される. その上で

[D] 虚軸に対する左右対称性  $\implies c_2 = 0$  (ドリフトなし)

とすると,

$$U_t = c_1 B_t$$

と定まる.

特に  $c_1 = \sqrt{\kappa}$  と径数付けした (また, 半平面 capacity を  $a_2(t) = 2t$  と径数付けした) のが  $\text{SLE}_\kappa$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - \sqrt{\kappa} B_t}, \quad g_0(z) = z$$

である.

以上の Schramm のアイデアは，次の定理として証明されている．

**定理 4.1 (Lawler-Schramm-Werner)** 連続関数空間上の測度で共形共変性と領域 Markov 性を持つものはすべて，1 径数族である  $SLE_\kappa$  測度， $\kappa \in (0, \infty)$  で与えられる．

さらに次が証明されている．

**定理 4.2 (Beffara)**  $\kappa \leq 8$  のとき  $SLE_\kappa$  曲線  $\gamma(0, \infty)$  のフラクタル次元 (Hausdorff 次元) は次式で与えられる：

$$d(\kappa) = 1 + \frac{\kappa}{8}.$$

## 4.2 局所性と制限性

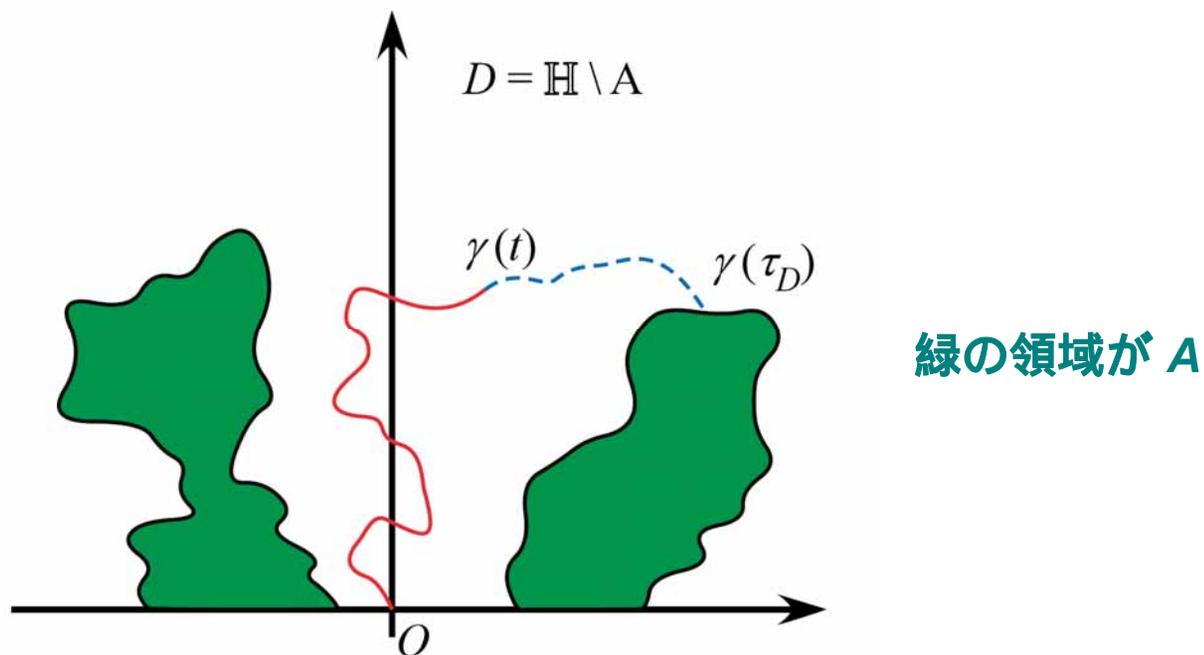
$$\mathcal{D} = \left\{ D \subset \mathbb{H} : \text{単連結}, \mathbb{H} \setminus D \text{ 有界}, \text{dist}(0, \mathbb{H} \setminus D) > 0 \right\}.$$

$D \in \mathcal{D}$  に対して

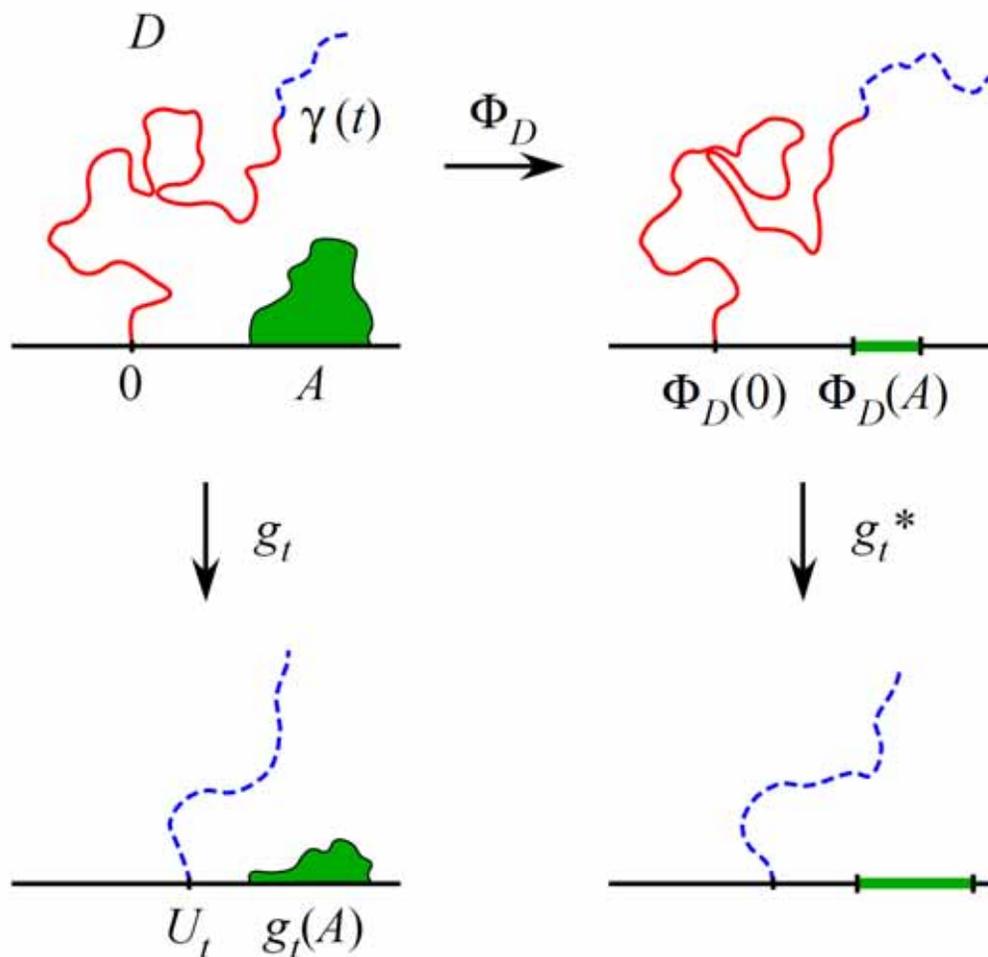
$$\exists! \Phi_D : \text{共形変換 s.t. } D \rightarrow \mathbb{H}, \quad \Phi_D(z) = z + o(1), z \rightarrow \infty.$$

SLE $_{\kappa}$  曲線  $\gamma$  に対して

$$\tau_D = \inf \left\{ t : \text{dist}(\gamma(t), \mathbb{H} \setminus D) = 0 \right\}.$$



$t < \tau_D$  の間は  $\gamma$  は部分領域  $D$  内に制限されている。



- $\gamma(0, \tau_D) \rightarrow \Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$  は  $\bar{\mathbb{H}}$  内の曲線.
- $\mu_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$  の共形不変性  $\implies$  曲線  $\Phi_D(\gamma(0, \tau_D))$  で生成される  $g_t^*(z)$  も Loewner 方程式に従うはず.

しかし、変換  $\Phi_D$  により曲線の径数付けに変更（時間変更）が生じる.

$\gamma$  の確率測度の共形不変性より，曲線

$$\gamma^*(0, t] = \Phi_D(\gamma(0, t]), \quad t < \tau_D$$

で生成される  $g_t^*(z)$  も Loewner 方程式に従うはずである). ただし, 変換  $\Phi_D$  により曲線の径数付けに変更が生じる.

$\gamma^*(0, t]$  の半平面 capacity は

$$a_2^*(t) = \text{hcap}(\gamma^*(0, t]) = \text{hcap}(\Phi_D(\gamma(0, t]))$$

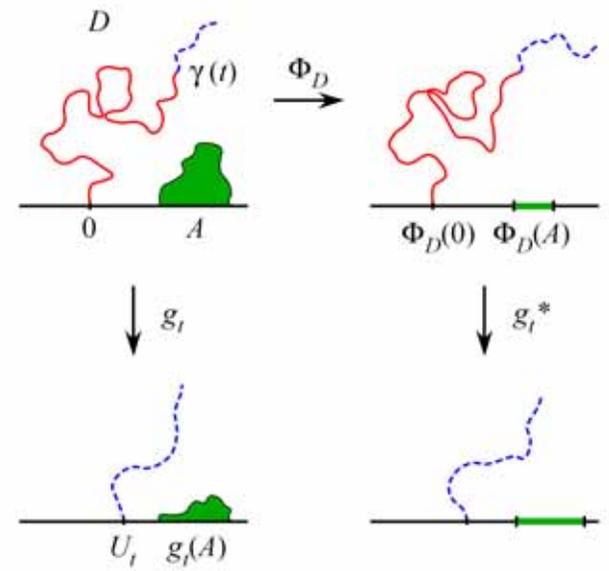
なので, 元の  $\text{SLE}_\kappa$  の右辺の分子で  $2 \rightarrow 2(\Phi_t'(U_t))^2$  として

$$\frac{d}{dt} g_t^*(z) = \frac{2(\Phi_t'(U_t))^2}{g_t^*(z) - U_t^*} \quad (4.2)$$

とすればよいことが分かる. ただしここで,  $U_t = \sqrt{\kappa} B_t$  に対して,

$$\begin{aligned} \Phi_t &\equiv \Phi_{g_t(D)} = g_t^* \circ \Phi_D \circ g_t^{-1} \\ U_t^* &\equiv g_t^*(\gamma^*(t)) = \Phi_t(U_t) \end{aligned}$$

である.



$U_t^*$  に対して伊藤の公式を用いると,  $U_t = \sqrt{\kappa}B_t$  なので

$$dU_t^* = \left[ \dot{\Phi}_t(U_t) + \frac{\kappa}{2}\Phi_t''(U_t) \right] dt + \sqrt{\kappa}\Phi_t'(U_t)dB_t$$

を得る. テキスト付録 A.4 の (A.50) より

$$\dot{\Phi}_t(U_t) \equiv \frac{d}{dt}\Phi_t(U_t) = -3\Phi_t''(U_t)$$

なので, この式は

$$dU_t^* = \left[ \frac{\kappa}{2} - 3 \right] \Phi_t''(U_t)dt + \sqrt{\kappa}\Phi_t'(U_t)dB_t \quad (4.3)$$

と書き直せる.

ランダムな時間変更  $t \mapsto r(t)$  を

$$t = \int_0^{r(t)} \Phi'_s(U_s)^2 ds$$

に従って行い,  $\tilde{U}_t^* \equiv U_{r(t)}^*$  とおくと, (4.3) は

$$d\tilde{U}_t^* = -b(\kappa) \frac{\Phi''_{r(t)}(U_{r(t)})}{\Phi'_{r(t)}(U_{r(t)})^2} \kappa dt + \sqrt{\kappa} d\tilde{B}_t \quad (4.4)$$

と変換される. ただし,

$$b = b(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}. \quad (4.5)$$

であり,

$$\tilde{B}_t \equiv \int_0^{r(t)} \Phi'_s(U_s) dB_s$$

は 1 次元標準ブラウン運動である.  $\tilde{g}_t^*(z) = g_{r(t)}^*(z)$  とすると, (4.2) は

$$\frac{d}{dt} \tilde{g}_t^*(z) = \frac{2}{\tilde{g}_t^*(z) - \tilde{U}_t^*}$$

と変換される.

- $\kappa = 6$  のときに限り  $b(\kappa) = 0$  となり,

$$d\tilde{U}_t^* = -b(\kappa) \frac{\Phi''_{r(t)}(U_{r(t)})}{\Phi'_{r(t)}(U_{r(t)})^2} \kappa dt + \sqrt{\kappa} d\tilde{B}_t$$

は

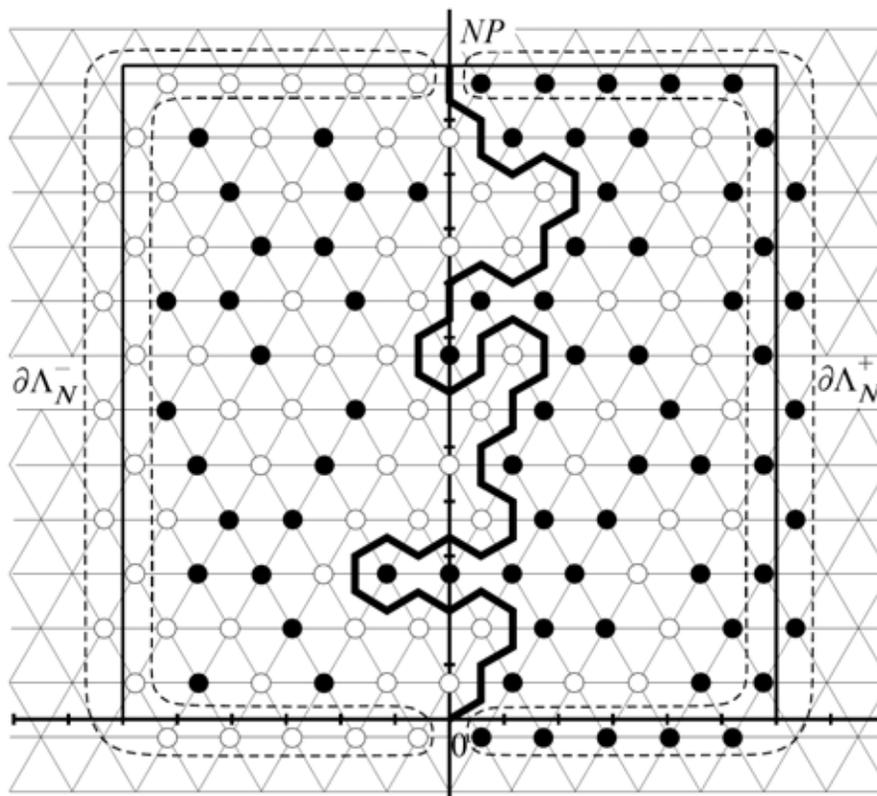
$$d\tilde{U}_t^* = \sqrt{6} d\tilde{B}_t$$

となる.

- このときは, 任意の  $D \in \mathcal{D}$  に対して  $g_t(z)$  も  $\tilde{g}_t^*(z)$  もともに,  $U_t \stackrel{d}{=} \sqrt{6} B_t$  で駆動される  $\text{SLE}_6$  を満たす.
- 言い換えると, 部分領域  $D$  に制限された  $\gamma$  の共形変換である  $\gamma^*(0, t] = \Phi_D(\gamma(0, t])$ ,  $t < \tau_D$  は, 制限のない  $\text{SLE}_6$  の時間変更ということである. つまり, 局所性が成り立つことになる.

**定理 4.3**  $\text{SLE}_\kappa$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H}; 0, \infty)}^\kappa$  は  $\kappa = 6$  のときに限り局所性を持つ.

# 局所性(locality property)



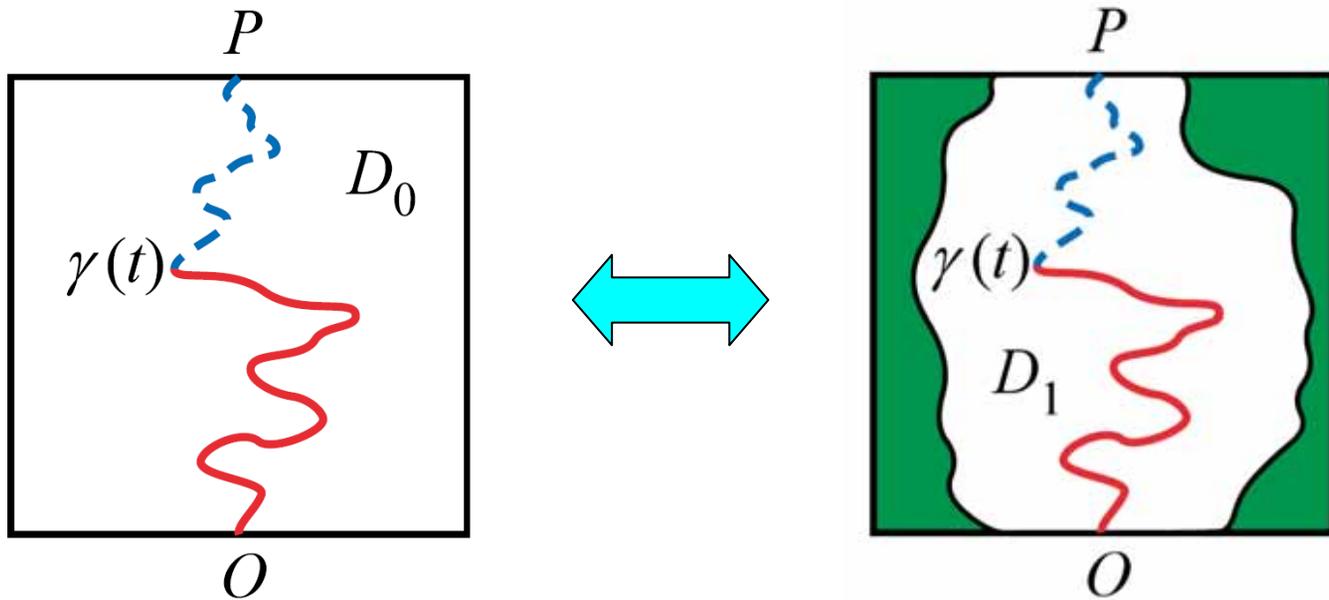
浸透探索過程  $\omega$

Bernoulli 測度  $\nu_p \implies$  局所性

# 局所性(locality property)

$D_1$  : 単連結領域,  $D_1 \subset D_0$ ,  $O, P \in \partial D_1$ .

$$\mu_{(D_1; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) = \mu_{(D_0; O, P)}^{\text{per}}(\gamma(0, t]) \mathbf{1}\{\gamma(0, t] \subset D_1\}, \quad \forall t \in (0, t_\gamma).$$



$\kappa \neq 6$  のときは (4.4) にはドリフト項があるので、 $U_t$  はマルチンゲールではない。しかし、次のようにして別の局所マルチンゲール  $M_t$  を得ることが出来る。

- $b$  を未定定数として  $(\Phi'_t(U_t))^b$  という量を考える。伊藤の公式を用いると、テキスト付録 A.4 に示した計算の結果、次の SDE を導くことができる：

$$d(\Phi'_t(U_t))^b = b(\Phi'_t(U_t))^b \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} dB_t + \left\{ \frac{(b-1)\kappa + 1}{2} \frac{(\Phi''_t(U_t))^2}{(\Phi'_t(U_t))^2} - \frac{8-3\kappa}{6} \frac{\Phi'''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} \right\} dt \right]. \quad (4.6)$$

- ここで  $b$  を

$$b = b(\kappa) = \frac{6-\kappa}{2\kappa}.$$

とする。すると (4.6) は

$$d(\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} = b(\kappa)(\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \left[ \sqrt{\kappa} \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} dB_t - \frac{8-3\kappa}{6} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) dt \right] \quad (4.7)$$

となる。ただしここで、 $\mathcal{S}f$  は関数  $f$  のシュバルツ微分

$$\mathcal{S}f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \frac{(f'')^2}{(f')^2} \quad (4.8)$$

を表す。

- 新たにパラメータ  $c$  を導入して

$$M_t = (\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} dM_t &= d(\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \\ &\quad - (\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \frac{c}{6} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) dt \end{aligned}$$

なので, (4.7) を代入すると

$$dM_t = b(\kappa) \frac{\Phi''_t(U_t)}{\Phi'_t(U_t)} M_t \sqrt{\kappa} dB_t - \frac{1}{6} \left\{ c + (8 - 3\kappa)b(\kappa) \right\} \mathcal{S}\Phi_t(U_t) M_t dt$$

となる.

- そこで

$$\begin{aligned}
 c = c(\kappa) &= (3\kappa - 8)b(\kappa) \\
 &= \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

と置くと,

$$dM_t = b(\kappa) \frac{\Phi_t''(U_t)}{\Phi_t'(U_t)} M_t \sqrt{\kappa} dB_t$$

となるので,

$$M_t = (\Phi_t'(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \tag{4.10}$$

は局所マルチンゲールであることになる.

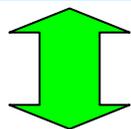
- ここでは説明を略すが, 一般に

$$\mathcal{S}\Phi_t(U_t) \leq 0.$$

$\kappa \leq 8/3$  のときは  $c(\kappa) \leq 0$  なので, このときは  $M_t \leq 1$ . したがって  $M_t$  はマルチンゲールである.

## Girsanov 変換

$$\bar{\mu}_{(D;U_t,\infty)} \Big| \mathcal{F}_t \implies (\Phi'_t(U_t))^{b(\kappa)} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^t \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\} \bar{\mu}_{(\Phi_t(D);\Phi_t(U_t),\infty)} \Big| \mathcal{F}_t$$



## 共形共変性

$$f \circ \bar{\mu}_{(D;z,\infty)} = |f'(z)|^b \bar{\mu}_{(f(D);f(z),\infty)}$$

ただしここでは,  $f = \Phi_t, z = U_t$  である.



$$b = b(\kappa) = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$t \rightarrow \infty$  で  $\gamma(t) \rightarrow \infty$ , かつ  $\gamma(0, \infty) \subset D$  であるような  $\text{SLE}_\kappa$  曲線  $\gamma$  に対しては,  $t \rightarrow \infty$  で  $\Phi'_t(U_t) \rightarrow 1$  であることが示せる.  $\kappa \leq 4$  では  $\text{SLE}_\kappa$  曲線は単純曲線であり  $\mathbb{H}$  内から外にでないことを用いると, 次の表式を導くことができる:  $\kappa \leq 4, D \in \mathcal{D}$  に対して

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = M_\infty = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\} \exp \left\{ -\frac{c(\kappa)}{6} \int_0^\infty \mathcal{S}\Phi_s(U_s) ds \right\}. \quad (4.11)$$

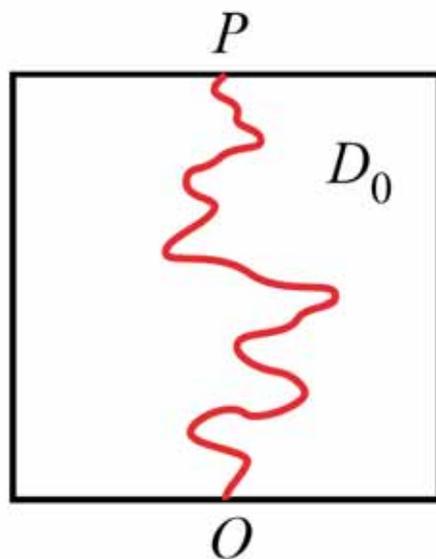
(4.9) から分かるように,  $\kappa \leq 4$  では  $\kappa = 8/3$  のときに限り  $c(\kappa) = 0$  となる. このとき (4.11) は

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D;0,\infty)}}{d\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}}(\gamma) = \mathbf{1}\{\gamma(0, \infty) \subset D\}$$

となる. 次が結論される.

**定理 4.4**  $\text{SLE}_\kappa$  測度  $\bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^\kappa$  は  $\kappa = \frac{8}{3}$  のときに限り制限性を持つ.

## 制限性 (restriction property)

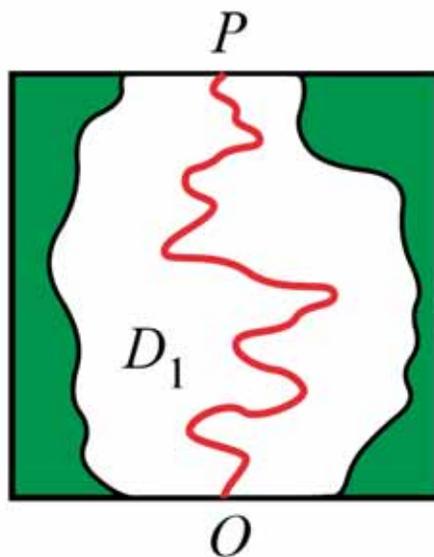


$D_1$  : 単連結領域,  $D_1 \subset D_0$ . ただし,  $O, P \in \partial D_1$ .

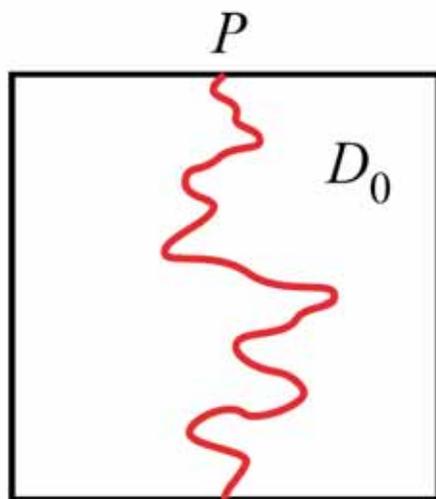
- 部分領域  $D_1$  で LERW を考える.

↓

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$



## 制限性 (restriction property)

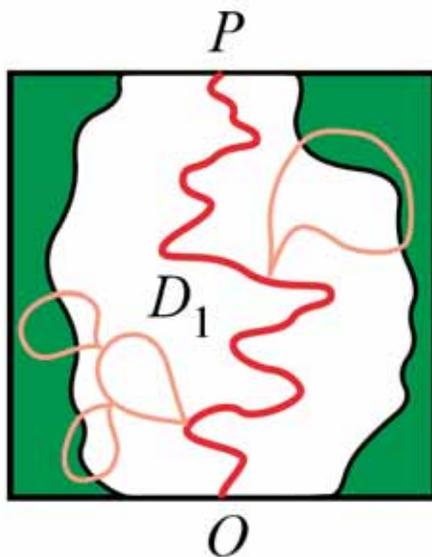


$D_1$  : 単連結領域,  $D_1 \subset D_0$ . ただし,  $O, P \in \partial D_1$ .

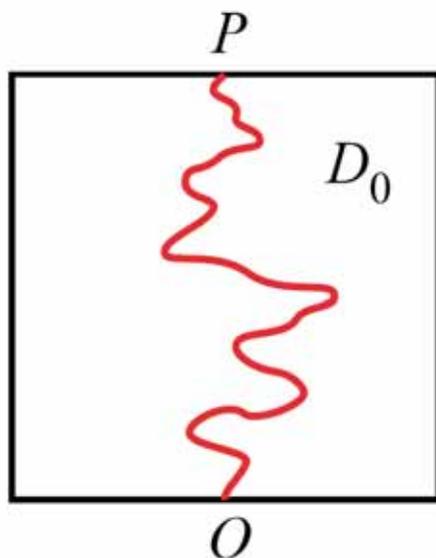
- 部分領域  $D_1$  で LERW を考える.

↓

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1; O, P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0; O, P)}^{\text{LERW}}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$



## 制限性 (restriction property)

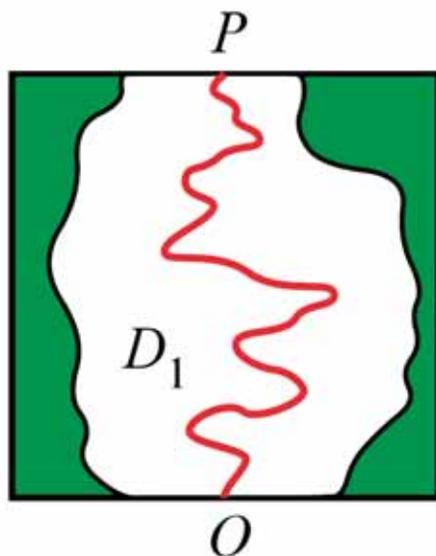


$D_1$  : 単連結領域,  $D_1 \subset D_0$ . ただし,  $O, P \in \partial D_1$ .

- 部分領域  $D_1$  で LERW を考える.

↓

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1;O,P)}^{\text{LERW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{LERW}}} < 1, \quad D_1 \subset D_0, \quad D_1 \neq D_0$$



- しかし, SAW の連続極限の測度においては

$$\frac{d\bar{\mu}_{(D_1;O,P)}^{\text{SAW}}}{d\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}} = \mathbf{1}\{\gamma(0, t_\gamma) \subset D_1\}, \quad D_1 \subset D_0$$

が成立する. これを制限性という.