

# 臨界現象・フラクタル曲線と Schramm-Loewner Evolution (SLE)

中央大学理工学部 香取眞理 (かとりまこと)

## Section 4.B

Summer School 数理物理2009 「ベキ乗則の数理」

2009年8月27 - 30日

東京大学大学院数理科学研究科 (東大駒場キャンパス)

## 4.3 対応関係

- $\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$  の共形不変性が証明されれば ( $\mu^{\text{per}}$  は局所性を併せ持つので)  
 $\implies \mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}} \stackrel{c}{=} \mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$
- $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}$  の共形共変性が証明されれば ( $\bar{\mu}^{\text{SAW}}$  は制限性を併せ持つので)  
 $\implies \bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$

ただし、ここでの  $\stackrel{c}{=}$  は共形変換によって変換できるという意味。

- 臨界浸透模型の連続極限の共形不変性  $\iff$  (三角格子上のみ) Smirnov (2001)
- SAW の連続極限の共形共変性  $\iff$  未証明
- 次は証明されている :

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2 \quad (\text{Schramm (2000), Lawler-Schramm-Werner (2001)})$$

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3 \quad (\text{Smirnov(2007)})$$

## 4.3 対応関係

- $\mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}}$  の共形不変性が証明されれば ( $\mu^{\text{per}}$  は局所性を併せ持つので)  
 $\implies \mu_{(D_0;0,P)}^{\text{per}} \stackrel{c}{=} \mu_{(\mathbb{H};0,\infty)}^6$
- $\bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}}$  の共形共変性が証明されれば ( $\bar{\mu}^{\text{SAW}}$  は制限性を併せ持つので)  
 $\implies \bar{\mu}_{(D_0;O,P)}^{\text{SAW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^{8/3}$

ただし、ここでの  $\stackrel{c}{=}$  は共形変換によって変換できるという意味。

- 臨界浸透模型の連続極限の共形不変性  $\iff$  (三角格子上のみ) Smirnov (2001)
- SAW の連続極限の共形共変性  $\iff$  未証明
- 次は証明されている :

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{LERW}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^2 \quad (\text{Schramm (2000), Lawler-Schramm-Werner (2001)})$$

$$\bar{\mu}_{(D_0;0,P)}^{\text{Ising}} \stackrel{c}{=} \bar{\mu}_{(\mathbb{H};0,\infty)}^3 \quad (\text{Smirnov(2007)})$$

$$d = 1 + \frac{\kappa}{8}$$
$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$d_{\text{LERW}} = d(2) = \frac{5}{4}, \quad d_{\text{SAW}} = d(8/3) = \frac{4}{3}, \quad d_{\text{Ising}} = d(3) = \frac{11}{8}, \quad d_{\text{per}} = d(6) = \frac{7}{4},$$
$$b_{\text{LERW}} = b(2) = 1, \quad b_{\text{SAW}} = b(8/3) = \frac{5}{8}, \quad b_{\text{Ising}} = b(3) = \frac{1}{2}, \quad b_{\text{per}} = b(6) = 0.$$

**注 4.1.** 2次元格子上的の統計物理模型の連続 (スケーリング) 極限と  $SLE_\kappa$  測度は次のように対応していることが “知られている”.

$$\begin{array}{ll}
 \kappa = 2 & \iff \text{ループ除去ランダムウォーク (LERW)} \\
 \kappa = \frac{8}{3} = 2.\dot{6} & \iff \text{自己回避ウォーク (SAW)} \\
 \kappa = 3 & \iff \text{臨界イジング界面曲線} \\
 \kappa = 4 & \iff \text{臨界 4 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = \frac{24}{5} = 4.8 & \iff \text{臨界 3 状態ポッツ模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = \frac{16}{3} = 5.\dot{3} & \iff \text{臨界イジング模型 [Fortuin-Kasteleyn cluster]} \\
 \kappa = 6 & \iff \text{臨界浸透探索過程} \\
 \kappa = 8 & \iff \text{uniform spanning tree (UST)} \tag{4.12}
 \end{array}$$

( $q$  状態ポッツ模型の  $q = 2$  がイジング模型,  $q = 1$  がパーコレーション模型,  $q = 0$  が UST にそれぞれ対応する.  $\kappa$  との対応は  $q = 2 + 2 \cos(8\pi/\kappa), 4 \leq \kappa \leq 8$  とされている.)

W. Kager and B. Nienhuis, A guide to stochastic Löwner evolution and its application, *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 1149-1229.

$$b = \frac{6 - \kappa}{2\kappa}$$

$$c = \frac{(3\kappa - 8)(6 - \kappa)}{2\kappa}$$



$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

Virasoro 代数

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + c \frac{n(n^2 - 1)}{12} \delta_{n+m,0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

$L_n|b\rangle = 0, n \geq 1, L_0|b\rangle = b|b\rangle$  となる固有値と固有ベクトルの対  $(b, |b\rangle)$  を導入.  
最高ウェイト表現  $\mathcal{H}_b = \mathbb{C}[L_{-1}, L_{-2}, \dots]|b\rangle$  を考える.

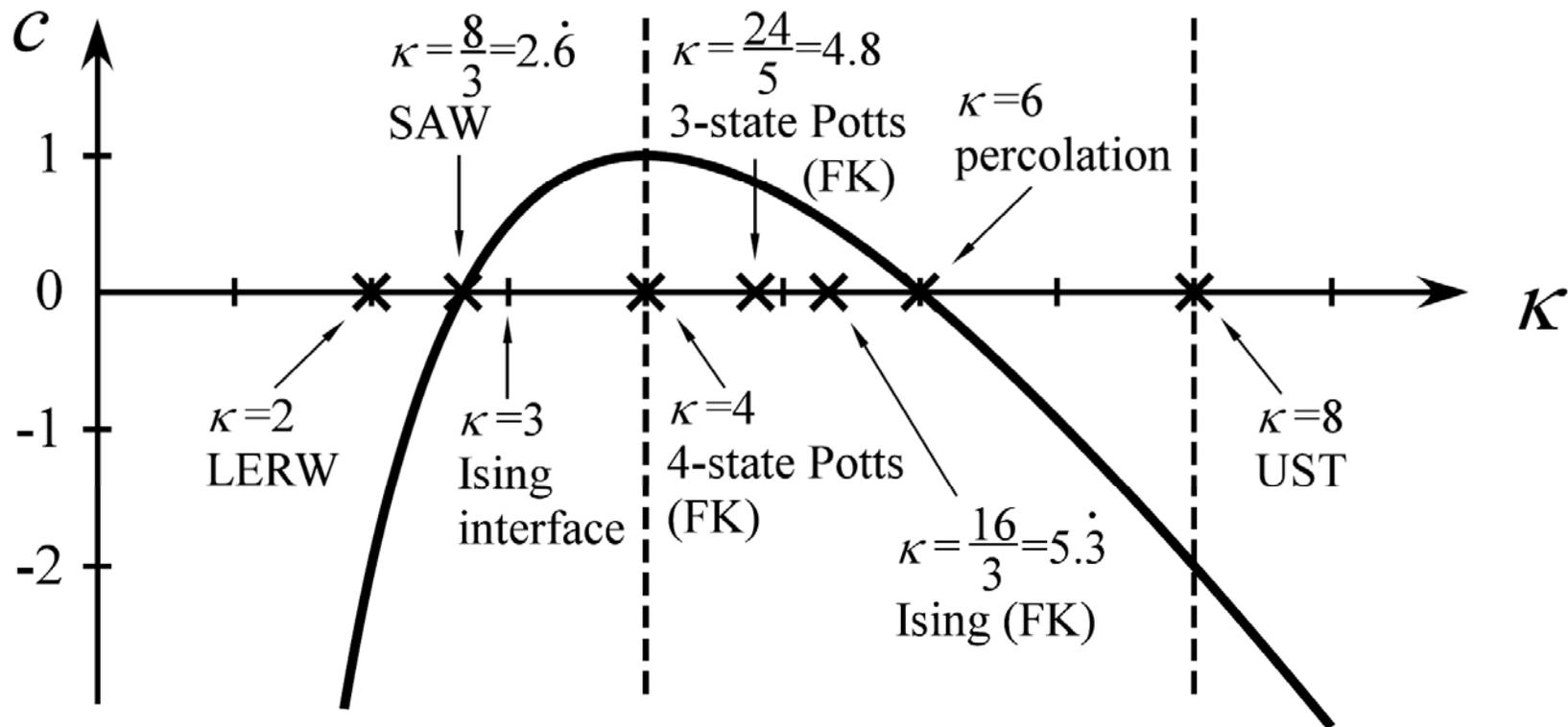
$$\det \begin{pmatrix} \langle b|L_2L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_2L_{-1}L_{-1}|b\rangle \\ \langle b|L_1L_1L_{-2}|b\rangle & \langle b|L_1L_1L_{-1}L_{-1}|b\rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4b + c/2 & 6b \\ 6b & 4b(1 + 2b) \end{pmatrix} = 0$$

となるとき、**レベル 2 の退化表現**が得られる (Kac 公式).

$b \neq 0$  とすると、この条件式は

$$c = \frac{2b(5 - 8b)}{1 + 2b}$$

に等しい



- SLE 曲線の径数  $\kappa$  と中心電荷  $c$  との対応.
- 平面上のフラクタル曲線の連続極限が特定の  $\kappa$  の値の SLE 曲線で実現される.
- (FK) は Fortuin-Kasteleyn random cluster model としての界面曲線.
- UST は uniform spanning tree.

# 今後の課題

## [1] SLE の基礎理論の整備

$U_t=B_t$  filtration, Bessel flow SLE

可逆性, 双対性, 径数付けについて

## [2] SLE 曲線の研究とSLE の拡張

SLE( , ), multiple SLE, ...

## [3] 統計力学模型の連続極限(フラクタル曲線)の同定

SAW, Ising 模型, Potts 模型,  $O(N)$  模型, ...

DLA, height models, Coulomb gas, ...

(なぜ, 特定の の値が物理のモデルを実現するのか?)

universality class の確率論的な意味づけ.)

## [4] 共形場理論との対応

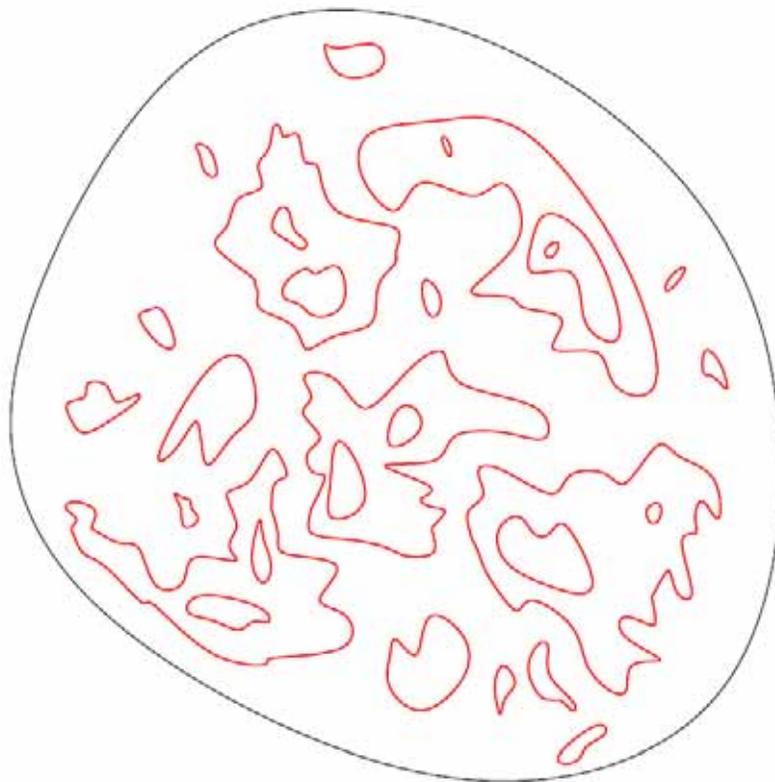
共形場(多点)相関関数 (多点)マルチンゲール

(Cardy's formula, Schramm-Zhou's 2pt martingale)

ストレス・テンソルと **CLE (conformal loop ensemble)**

## ストレス・テンソルとCLE (Conformal Loop Ensemble)

Ref: B. Doyon, arXiv:0903.0372, 0908.1511



Drawing representing a CLE loop configuration on a domain.



**CFT (Conformal Field Theory) と CLE (Conformal Loop Ensemble)**  
**局所的な演算子 (頂点作用素) [CFT] とパターンの統計 [SLE, CLE]**  
**代数 [CFT] と確率論 [SLE, CLE]**

**Ref: B. Doyon, arXiv:0903.0372, 0908.1511**

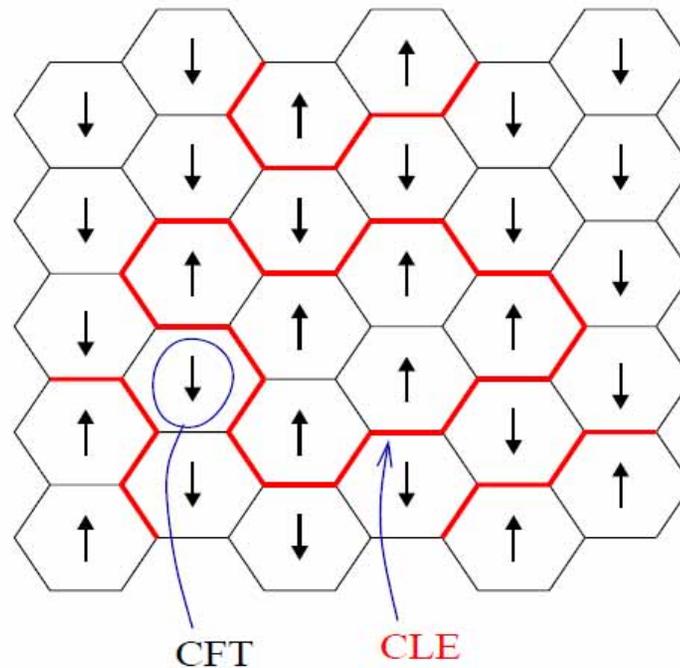


Figure 1: Example of a few hexagonal lattice sites with Ising spins on the faces and the corresponding cluster boundaries. CFT describes most easily the fluctuations of the spins, and CLE that of the cluster boundaries.

**謝辞:** 本講演の機会を与えて下さいました小嶋泉氏, 河東泰之氏, 緒方芳子氏に感謝いたします。また, 共同研究者の種村秀紀氏 (千葉大理) に感謝いたします。