双曲幾何学におけるタイリングと非周期的なタイリング

中央大学理工学部物理学科4年　香取研究室　　広瀬史明

１　双曲幾何学について

ユークッリド幾何学とは、ユークリッドか構成した次の５つの公準を満たす幾何学のことをいう。

１．任意の２点を与えられたとき、それらを通る直線を引くことができる。
２．任意の線分は、それを直線に延長できる。
３．与えられた点を中心とし、与えられた長さを半径とする円を描くことができる。
４．どの直角も等しい。
５．与えられた一本の直線上にない与えられた１点を通り、元の直線と交わらない直線はただ一つである。

この5つの公準のうち、１，２，３、４を満たすが5番目の公準だけを否定した幾何学をガウス、ロバチェフスキー、ボヤイらによって独立に発見された。

5番目の公準の否定のしかたは2通りある。

5.「与えられた1本の直線上にない与えられた1点を通り、元の直線と交わらない直線は複数ある」

双曲幾何学

5.「与えられた直線上にない与えられた1点を通り、もとの直線と交わらない直線は存在しない」

楕円幾何学

双曲幾何の世界を実際に目に見える形で表したものを「モデル」といいます。

・ポアンカレの円盤モデル

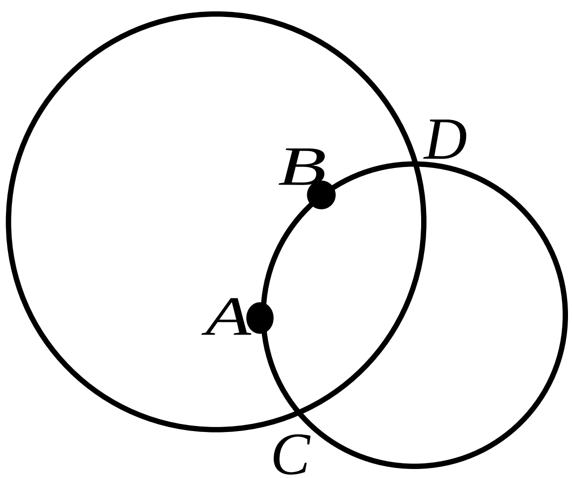
円盤モデルは二次元平面の集合

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

に距離 $d_h(x, y)$ を

$$d_h(A, B) = \log \frac{d(A, D)d(B, C)}{d(A, C)d(B, D)}$$

と定義した空間をいう。 $d(x, y)$ はユークリッド平面での距離。



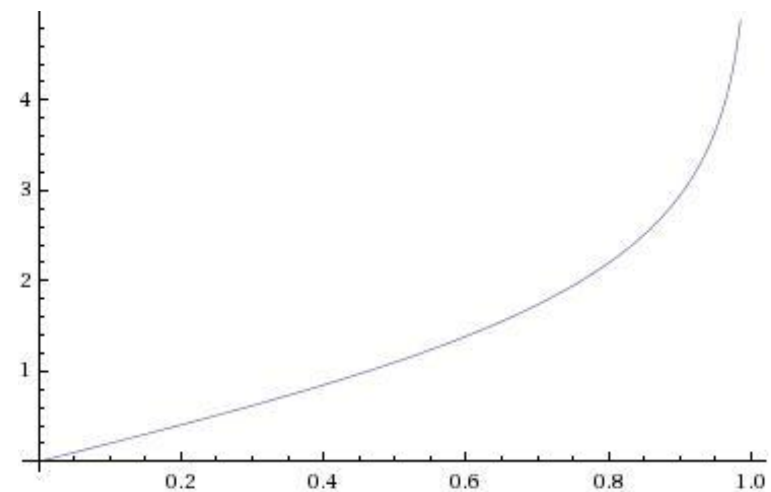


図2　　円盤モデルの原点からの距離

円盤モデルDにおける直線は、Dと直行する円の円弧である。

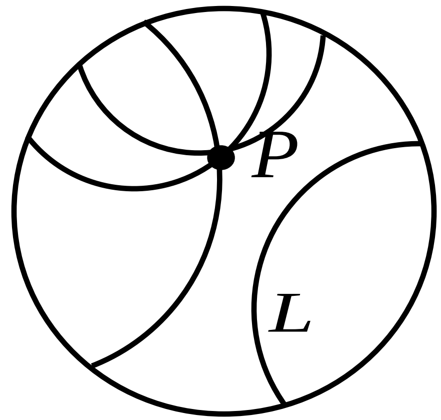


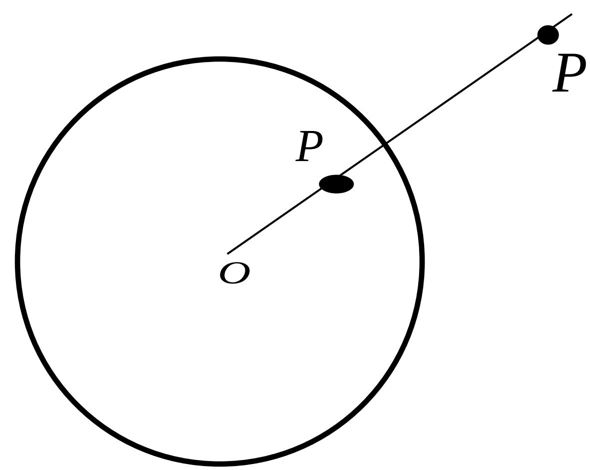
図３　　直線Lに対して複数の１点Pを通る直線がある

・反転

点Pに対して、半径Rの円の中心Oを出発点とする半直線OP上に

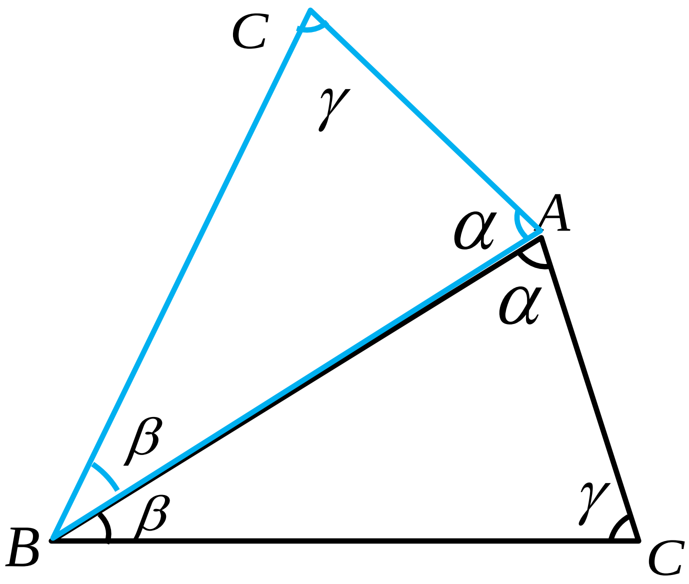
$$OP \cdot OP' = R^2$$

となるように点P'をとる。 このP'にPを対応させる変換を反転という。



ポアンカレ円板において、反転は等長変換で、直線を直線にうつす。

- 三角形での反転によるタイリング



頂点Aを中心に反転した回数をa回とする

$$2a\alpha = 2\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{a}$$

同様に

$$\beta = \frac{\pi}{b} \quad , \quad \lambda = \frac{\pi}{c}$$

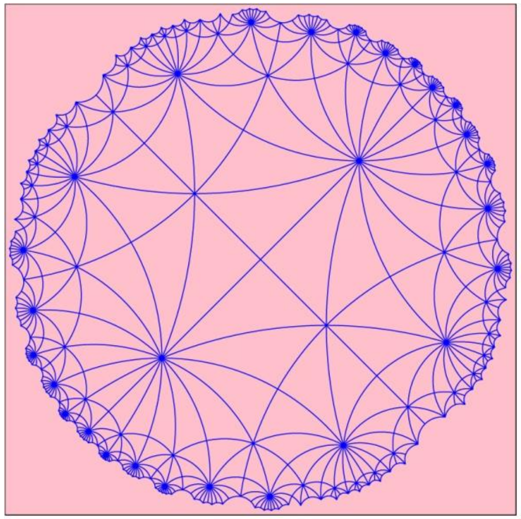
双曲平面の三角形の内角の和は

$$\alpha + \beta + \lambda < \pi$$

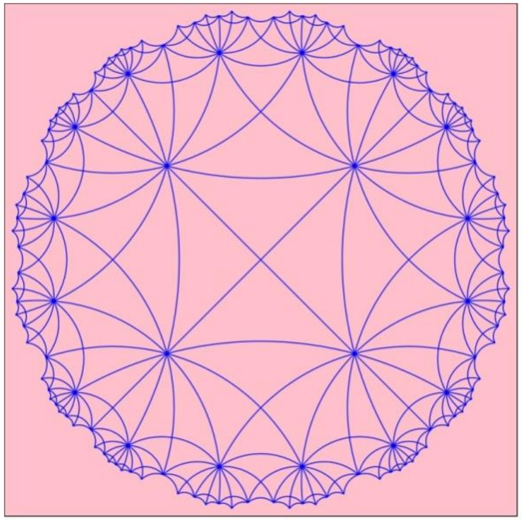
であるから

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$$

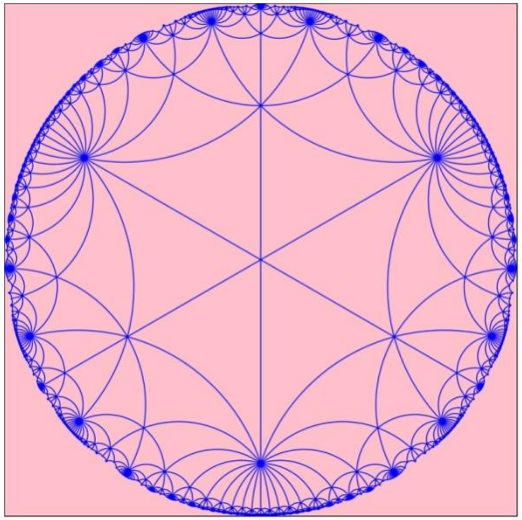
これを満たす三角形ならば双曲平面を充填できる



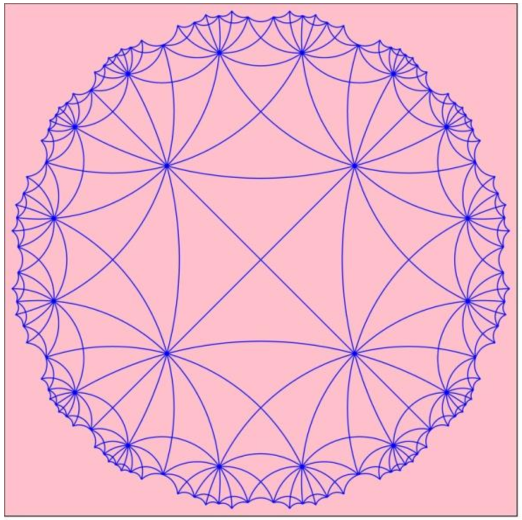
(8,4,2)



(6,6,2)

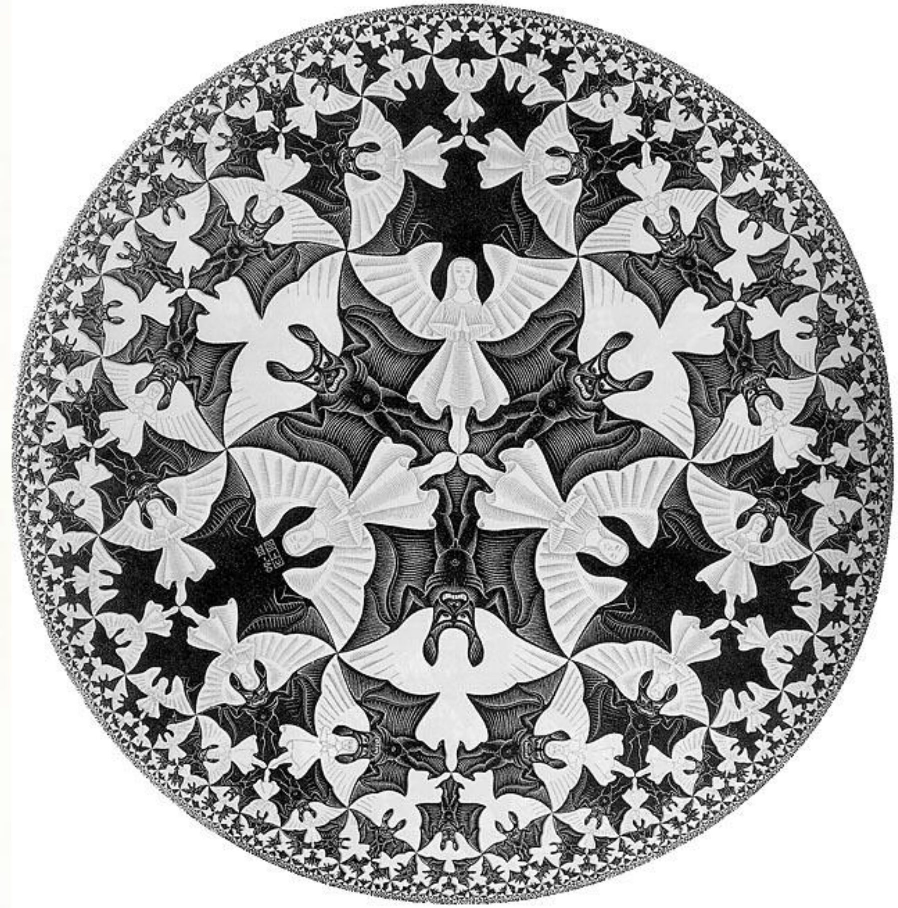


(10,4,3)



(6,6,2)

エッシャーの作品「円の極限Ⅲ」　(3,3,3)



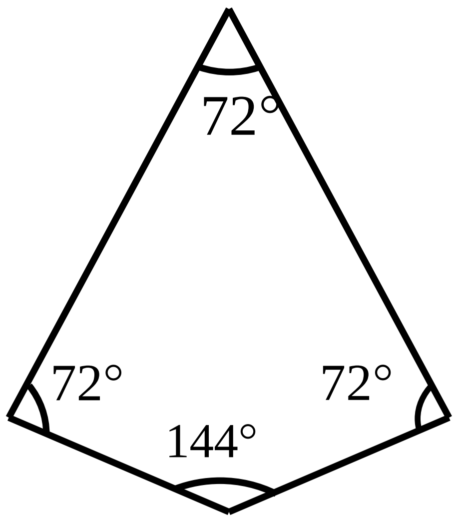
エッシャーの作品「円の極限Ⅳ（天国と地獄）」 (4,4,3)

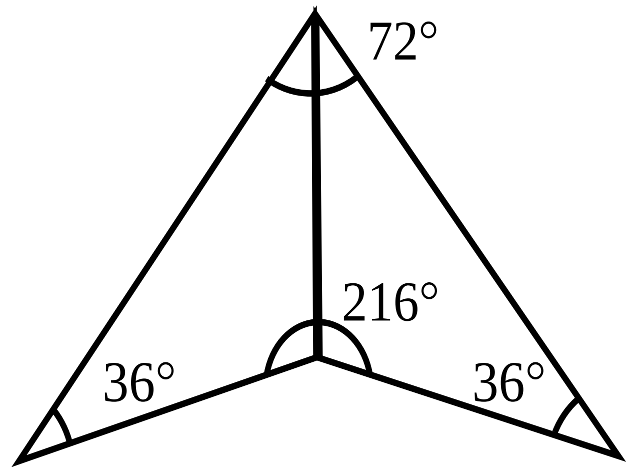
画像は http://winnie.kuis.kyoto-u.ac.jp/~okuno/Lecture/05/IntroAlgDs/Escher-Limit.html からお借りしました。

・ 非周期的タイリング

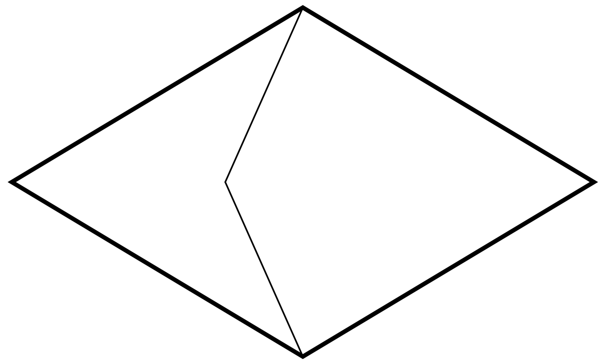
周期的なタイリングとは、タイリングされた一部分を並行移動することで平面を充填することが可能なタイリングのことをいう。 1974年イギリスの数学者ロジャー・ペンローズは二種類のタイルで非周期的なタイリング方法を考案した。 ペンローズ以前にも非周期的なタイリング方法は発見されていたが、たった二種類のタイルでの可能性をしめしたのはペンローズが初めてである。

ペンローズパターンは次の二つのタイルによる

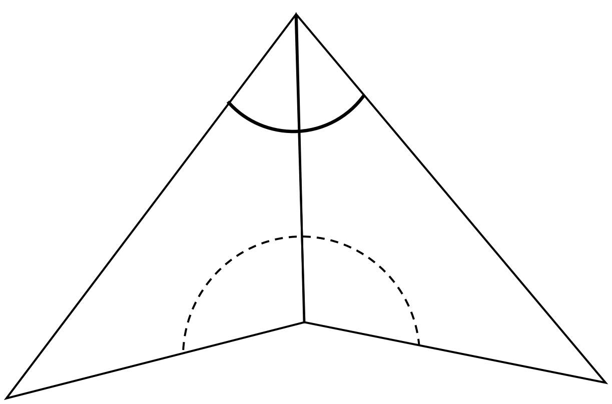


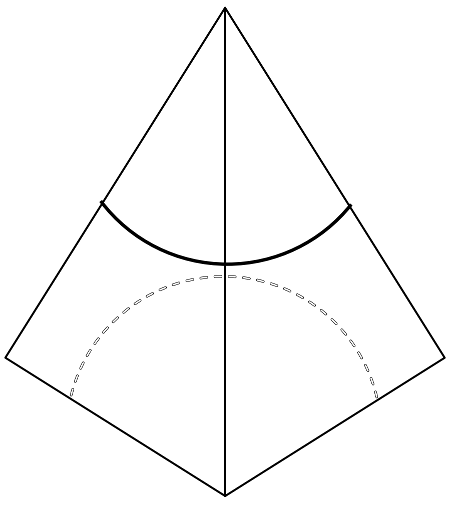


単にこの2つのタイルを敷き詰めるだけでは周期的なタイリングになってしまう可能性がある。 非周期的にタイリングするには

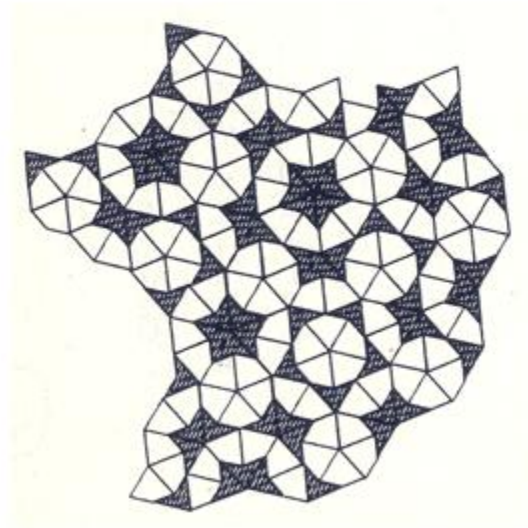


上のようなひし形を作らないように配置するだけでよい。





波線や実線が、それぞれ互いにつながるようにならべればよい。



凧と矢のタイルのそれぞれの個数N(k),N(d)の比は黄金比である。

$$\frac{N(k)}{N(d)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\cdots$$

画像は http://ynomura.dip.jp/ からお借りしました。

参考文献　「群と幾何学」 難波　誠　著　　現代数学社
「曲面の幾何学とモジュライ」 河野　俊丈　著　　日本評論社