

対数正規分布への入門

香取研M1 和泉南

2007/07/18

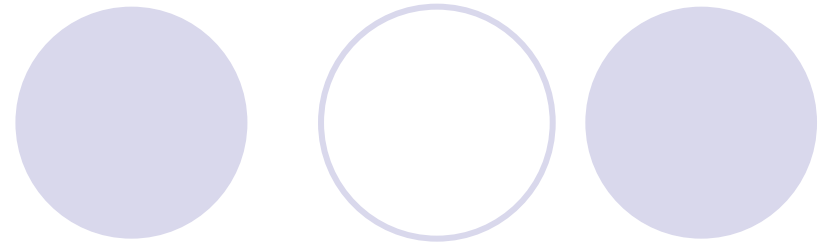
身近な生活によくあらわれる分布

- ベキ分布
- 対数正規分布

→ 社会現象や自然現象に頻繁に出てくる！

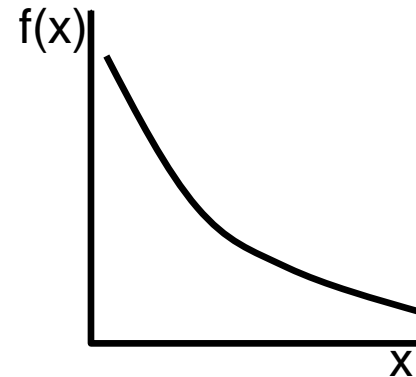
→ どんな現象がベキ分布や対数正規分布であらわされるか見てみよう！

べき分布とは



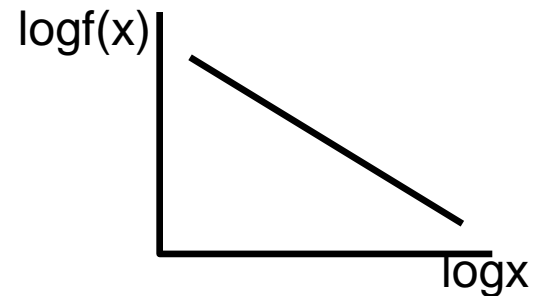
分布関数

$$f(x) = cx^{-a}$$
$$a > 0, x > 0$$



特徴

- 分布関数を両対数にプロットすると右下がりの直線になる



ベキ分布でよくあらわされる現象の例

- 地震のマグニチュードと地震回数
の関係
(Gutenberg Richter Law)

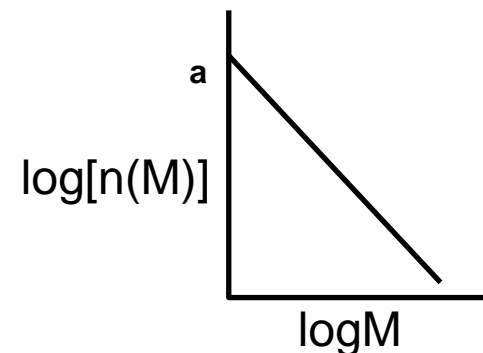
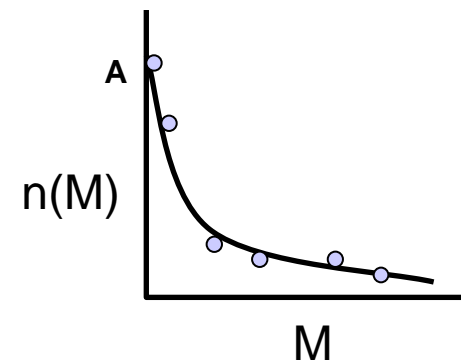
M: マグニチュード

$n(M)$: 地震回数

$$n(M) = A \cdot M^{-b}$$

$$\log[n(M)] = a - b \cdot \log M$$

($a = \log A$)



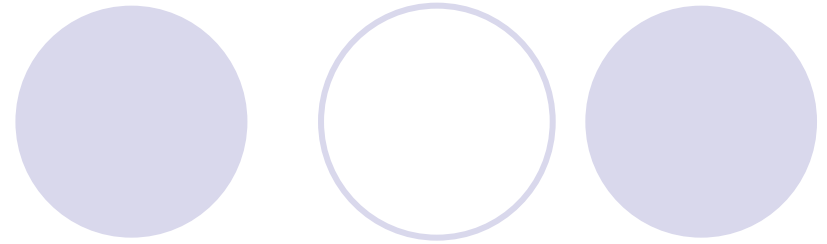
ベキ分布でよくあらわされる現象の例

- 月のクレータの大きさ分布
- 小惑星の質量分布
- ガラス・氷・石膏などさまざまな物質の破片

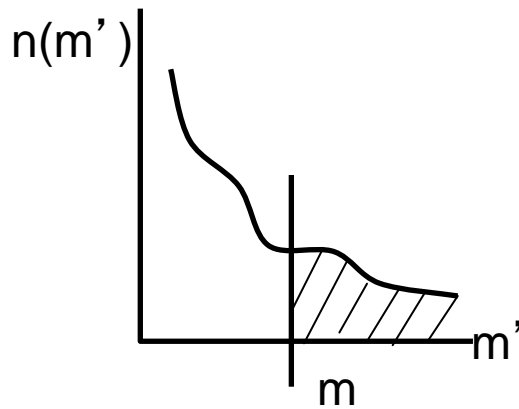
さまざまな物質を衝突させて得られる破片の累積質量分布や累積サイズ分布は多くの場合にベキ分布になっている

→ 衝突破壊とベキ分布は深く結びついている

衝突破壊とベキ分布



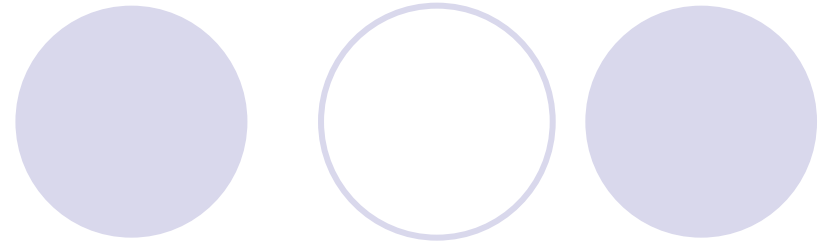
- 宇宙に無数に漂っている小惑星
質量分布 $n(m)$ 小さいものは無数にあるが
大きいものは少ない
→ベキ分布？



でこぼこしてわかりにくい
累積質量分布

$$N(m) = \int_m^{\infty} n(m') dm'$$

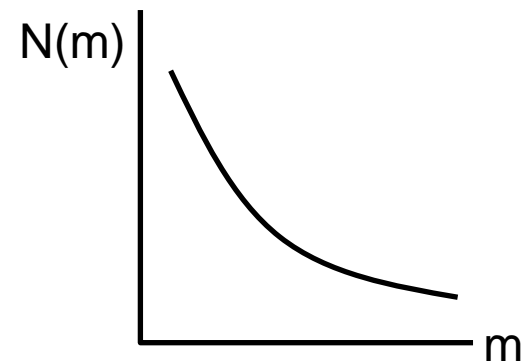
衝突破壊とベキ分布



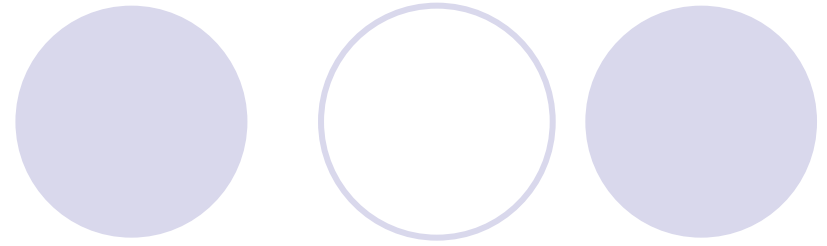
- 累積質量分布
質量の大きい順に1から番号をふる
質量を横軸、番号を縦軸にプロットする

小惑星の累積質量分布はベキ分布となる

$$N(m) \sim m^{-b}$$



対数正規分布とは



- 正規分布

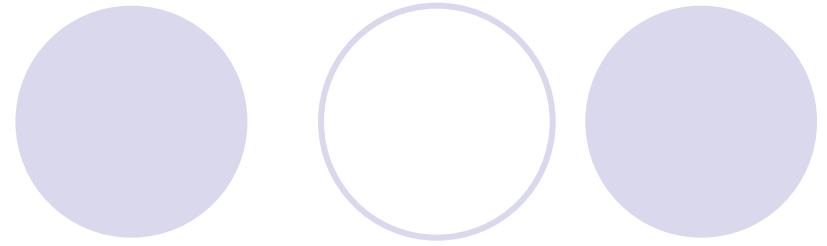
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad -\infty < x < \infty$$

- 対数正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad x \geq 0$$

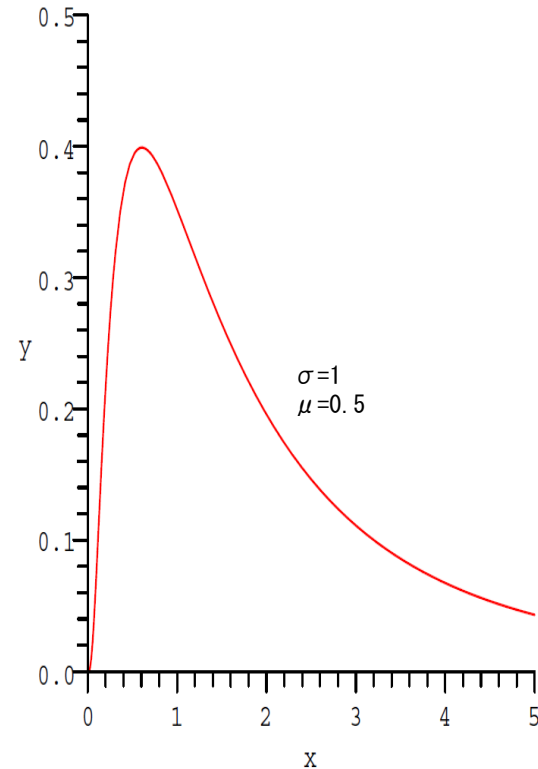
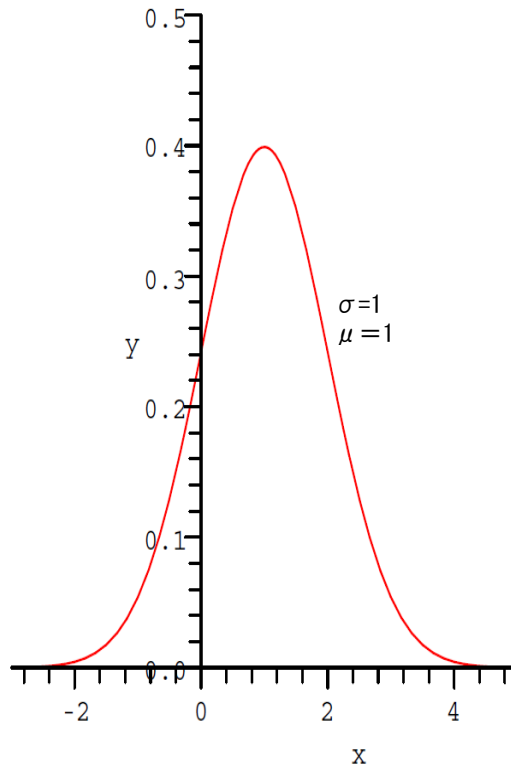
変数 x の対数を取ったものが正規分布するとき
 x は対数正規分布に従うという

対数正規分布とは



正規分布

対数正規分布



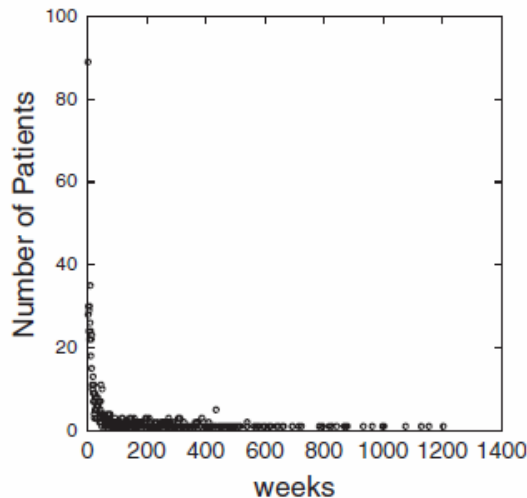
対数正規分布でよくあらわされる現象の例

- ガラス棒の破片の大きさ
- 鉱石の破片の大きさ
- 半導体のノイズの雑音特性
- 科学者が論文を発表する頻度
- 収入分布
- 体重分布
- 高齢者の介護期間分布

高齢者の介護期間分布

- O. Moriyama, H. Itoh, S. Matsushita, and M. Matsushita, Long-tailed duration distributions for disability in aged people, J. Phys. Soc. Jpn. 72 (2003) 2409-2412

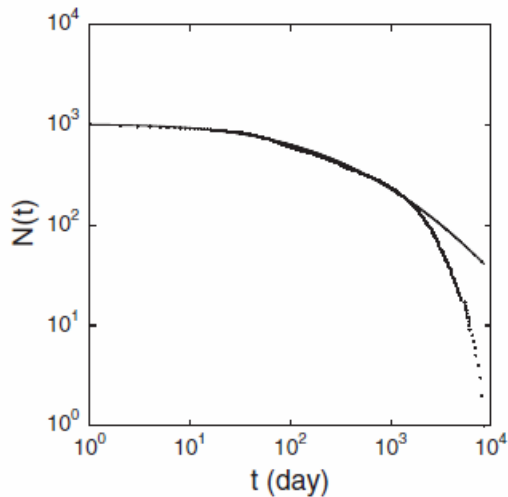
データ: 東京都老人医療センター



long-tailな分布
高齢者の介護期間分布
の特徴

高齢者の介護期間分布

● 累積度数分布



対数正規分布

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{-\frac{[\ln(\frac{t}{T})]^2}{2\sigma^2}\right\}$$

の累積度数分布

$$N(t) = \frac{N_T}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{\ln(\frac{t}{T})}{\sqrt{2}\sigma} \right] \right\}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

高齢者の介護期間分布

- 対数正規分布は高齢者の介護期間分布をよくあらわしている
- 高齢者はひとつの病気にかかるとそれが引き金となって他の病気も連続して引き起こされる
→ 対数正規分布とのつながり

中心極限定理

- 確率変数 x_1, x_2, x_3, \dots

$$X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

$$\frac{(x_1 - \langle x \rangle) + (x_2 - \langle x \rangle) \dots}{\sqrt{N}} = \frac{X - N\langle x \rangle}{\sqrt{N}}$$

は、 $n \rightarrow \infty$ の極限で平均0、分散 σ^2 の正規分布に従う

- 対数正規分布の場合 $Y = x_1 \times x_2 \times x_3 \dots$ とおくと

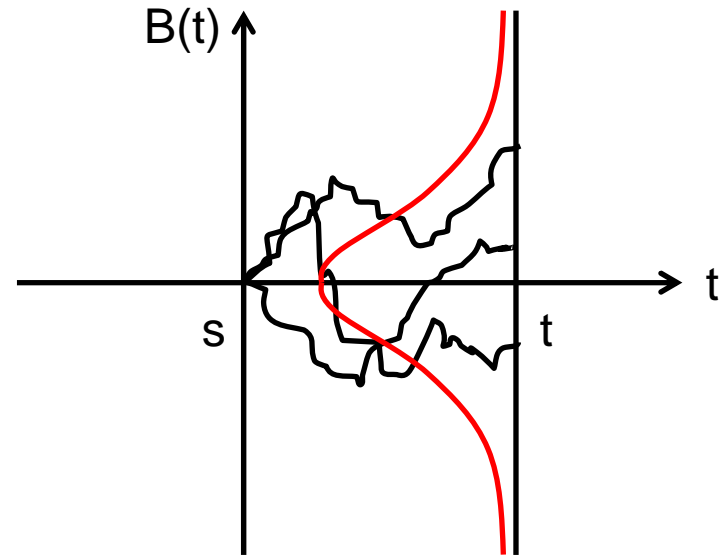
$$\log Y = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_N$$

これが正規分布に従う

→ 正規分布は加法的、対数正規分布は乗法的！

対数正規分布はどのようなプロセスで発生するの？

- 0から出発したブラウン運動の時刻sから時刻tまでの変位 $(B(t)-B(s))$ は平均0、分散 $(t-s)$ の正規分布に従う



- これと同じように対数正規分布に従う、ブラウン運動のようなものはないのか？

幾何ブラウン運動

- 幾何ブラウン運動の確率微分方程式

$$dX_t = \sigma \cdot X_t dB_t + \mu \cdot X_t dt$$

ブラウン運動

ドリフト項

自分自身の履歴に影響される

この確率微分方程式をシミュレーションして
幾何ブラウン運動が対数正規分布に従うことを
確かめたい

確率微分方程式のシミュレーション

● 確率微分方程式

$$dX_t = \sigma \cdot X_t dB_t + \mu \cdot X_t dt$$

差分の式[刻みh]

$$X_i - X_{i-1} = \sigma \cdot X_{i-1} \underbrace{[B_i - B_{i-1}]}_{\text{分散}h\text{の正規乱数}} + \mu \cdot X_{i-1} h$$

分散hの正規乱数

$$X_i = X_{i-1} + \sigma \cdot X_{i-1} \sqrt{h} R + \mu \cdot X_{i-1} h$$

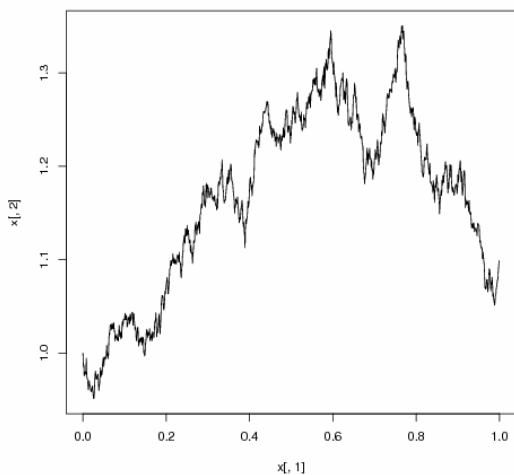
確率微分方程式を解く
[伊藤の公式]

$$\text{解 } X_t = X_0 \cdot \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot t + \sigma \cdot B_t \right]$$

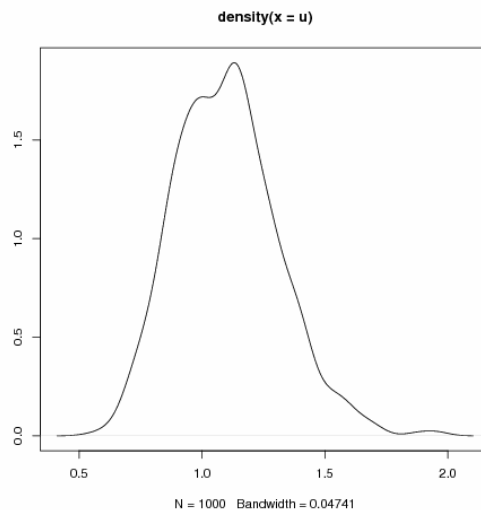
幾何ブラウン運動のシミュレーション

- 差分の式

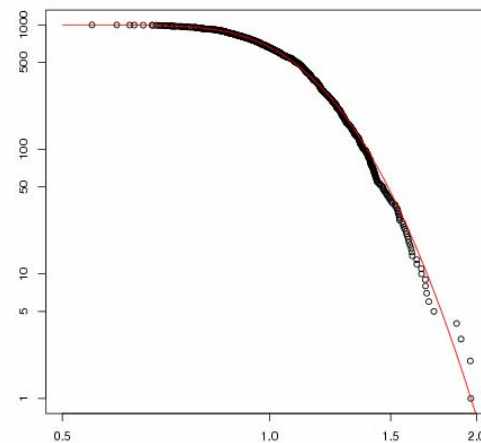
軌跡



度数分布



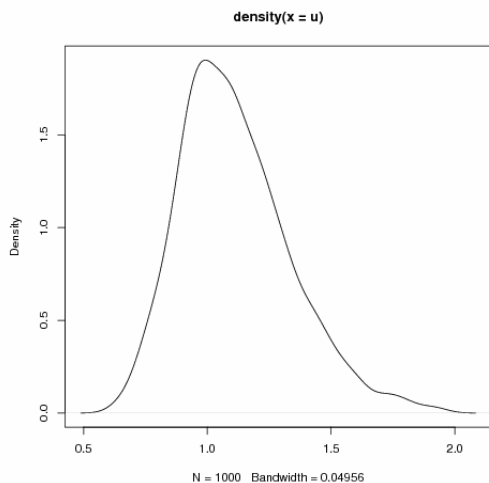
累積度数分布



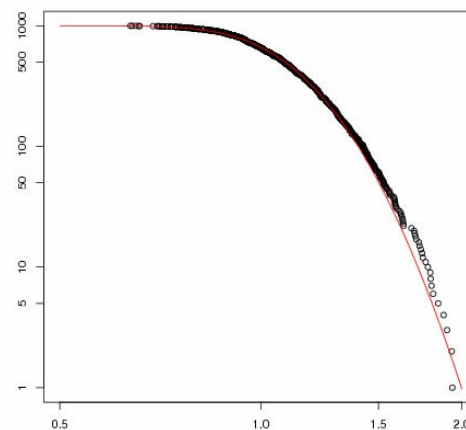
幾何ブラウン運動のシミュレーション

- 確率微分方程式の解

度数分布



累積度数分布



幾何ブラウン運動のシミュレーション

- { 差分の式
確率微分方程式の解

の両方のシミュレーションから、幾何ブラウン運動は対数正規分布にしたがっていることが確かめられた

これからの展望

- オルンシュタイン・ウーレンベック過程 (P.10)

$$dq_t = -\gamma \cdot q_t dt + \beta \cdot dB_t$$

→ 定常的にガウス分布をもつ

これを応用して、
幾何ブラウン運動の定常バージョンができる
のでは？

など…