30pRC-7

１次元量子ウォークとガウスの超幾何関数

中大理工　大谷諭，香取眞理

One-dimensional quantum random walks and the Gauss hypergeometric functions

Chuo University,　S. Ootani, M. Katori

１次元２状態量子ウォークモデルを考える [1].
ユニタリー行列 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と初期 qubit $\varphi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ が原点に与えられたとき、
時刻 n に格子点k における粒子の存在確率は

$$P_n(k) = (\Xi_n(k)\varphi)^* \Xi_n(k)\varphi$$

で与えられる $(a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbf{C}, n = 1, 2, 3, \cdots)$.
ただし $\Xi_n(k) = \begin{bmatrix} a_n(k) & b_n(k) \\ c_n(k) & d_n(k) \end{bmatrix}$ の各成分は次の漸化式を満たす.

$$\begin{aligned} a_{n+1}(k) &= a \cdot a_n(k+1) + b \cdot c_n(k+1) \\ b_{n+1}(k) &= a \cdot b_n(k+1) + b \cdot d_n(k+1) \\ c_{n+1}(k) &= c \cdot a_n(k-1) + d \cdot c_n(k-1) \\ d_{n+1}(k) &= c \cdot b_n(k-1) + b \cdot d_n(k-1) \end{aligned}$$

初期値は

$$\begin{aligned} a_1(k) &= a\delta_{-1,k} \\ b_1(k) &= b\delta_{-1,k} \\ c_1(k) &= c\delta_{1,k} \\ d_1(k) &= d\delta_{1,k} \end{aligned}$$

である.
本講演ではこの漸化式の解は一般にガウスの超幾何関数で与えられることを示す.
$b_n(k)$ について具体的に書くと

$$\begin{aligned} b_n(k) = & \ b \quad \cdot a^{-n/2-k/2-1} d^{n/2+k/2} \begin{bmatrix} n-1 \\ n/2+k/2 \end{bmatrix} \\ & \times \ F(-n/2-k/2, -n/2+k/2+1; -n+1; \Delta/ad) \end{aligned}$$

である. ただし $\Delta = \det U = ad - bc$ である.
古典的なランダムウォークには二項係数が対応しているが量子ウォークには上記のような超幾何関数が対応している.

[1]　今野紀雄著「量子ウォークの数理」（産業図書）