可積分系数理の交通流への応用

東京大学大学院数理科学研究科　金井 政宏 (Masahiro Kanai)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1　交通流とモデル化

2　非対称単純排他過程とゼロ距離過程

一次元の交通流をセル・オートマトンによりモデル化するに際し，一次元格子上を粒子が一定の方向へ運動するものとする．このとき各サイトには高々一つの粒子が入ることが可能であるとする．（一般にこのようなモデルを排他過程という．）以降，格子には周期境界条件を課すものとする．各粒子は衝突と追越が禁止され，また各離散ステップ毎に同時に運動する．（この条件をパラレル・アップデートという．）ここでは，それらの基本的なモデルとなる非対称単純排他過程 (ASEP) とゼロ距離過程 (ZRP) を導入し，前者が後者の特別な場合であることを見る．

2.1　ASEP

ASEP を以下のように定義する．粒子が運動する際，各粒子は一定の確率 p を以って次のサイトに移動する．このとき，もし移動しようとするサイトが他の粒子によって占有されているならばこの移動は無効となる（図 1）．

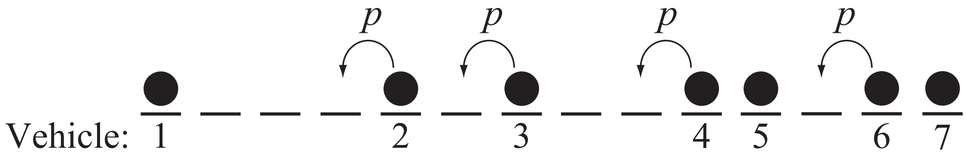

図 1　各粒子は格子上を左に向かって進む．各時刻，粒子は一定の確率 p ですぐ隣のサイトに移る．ただし，隣のサイトが既に粒子によって占められている場合は移動できない．

2.2 ZRP

ZRP は以下のように定義される．ASEP と同じく一次元格子上でサイト間を移動する粒子系により記述される．ZRP の場合，ASEP と異なり各サイトに複数の粒子が入ることが可能となる．そして，各粒子の移動確率は，その粒子の移動前のサイトに入っている粒子数の関数として与えられる．ZRP は排他過程への対応付けが可能であって，それは ZRP のサイトを排他過程の粒子に対応させ，さらに ZRP の粒子を排他過程での粒子間の空きサイトに対応させることにより実現される（図 2)．ここで，両モデルの粒子の移動確率は（進行方向は逆転するが）そのまま対応し，特に一定値に取った場合に ZRP は ASEP と同等になる．以降，ASEP も ZRP の表示で考えることにする．すなわち，粒子及びサイトといった場合は ZRP のものを指すものとする．

ZRP の最も著しい特徴は，非平衡定常状態が積の形に書けることである．(非平衡定常状態については次章を参照.) すなわち, 非平衡定常状態において粒子の配置 $\{n_1,\dots,n_M\}$ の実現する確率 $P^*(\{n_m\})$ がある因子 $f(n)$ によって

$$P^*(\{n_m\}) = Z_{M,N}^{-1}\prod_{m=1}^{M} f(n_m) \tag{2.1}$$

という形に表わされる．ただし，N は粒子数，M はサイト数であり，i 番目のサイトを占める粒子の数を n_i と書き，各サイトに n_1，n_2，...，n_M 個の粒子が配分された状態を $\{n_1,n_2,\dots,n_M\}$ と表わした．ここで，$Z_{M,N}$ は規格化定数であり，平衡統計力学での分配関数に当たる役割を果たす．そこで，これを分配関数と呼ぶことにすると，(2.1) から $Z_{M,N}$ は

$$Z_{M,N} = \sum_{\{n_m\}}\prod_{m=1}^{M} f(n_m)\,\delta\left(\sum_{m=1}^{M} n_m - N\right) \tag{2.2}$$

と書かれることが分かる．δ はデルタ関数である．次章でこの因子 $f(n)$ が粒子の移動確率 $u(n)$ により

$$f(n) = f(0)\left(\frac{f(1)}{f(0)}\right)^n \frac{u(1)^n}{1-u(n)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-u(j)}{u(j)} \tag{2.3}$$

で与えられることをみる．

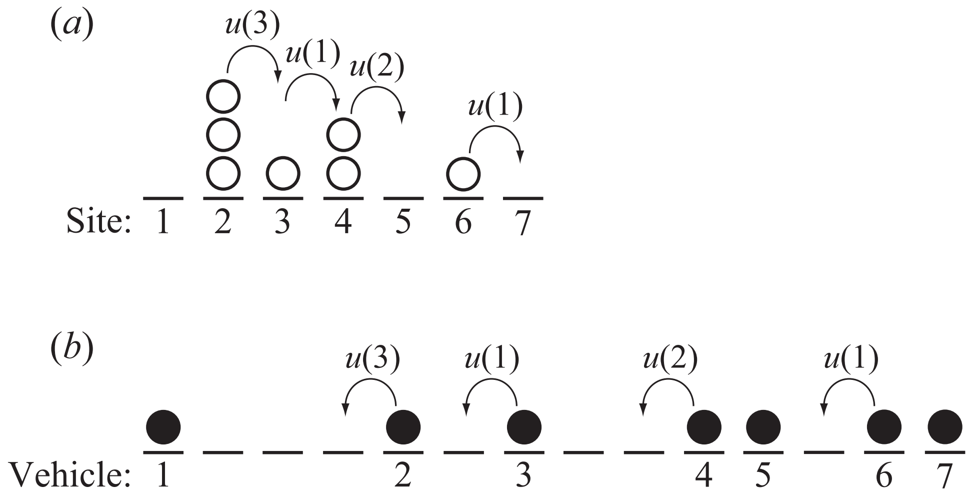

図 2　(a)ZRP を表わす．ZRP では，各サイトに複数の粒子が入ることが可能である．粒子はすぐ隣のサイトに，元のサイトにある粒子数に依存した確率で移動する．(b)ZRP に対応する排他過程．ZRP は車間距離に依存した移動確率を持つ排他過程に読み替えることが出来る．ここで，確率を定数に取れば ASEP に一致する．

3　マスター方程式と非平衡定常状態

ZRP や ASEP のような確率過程はマルコフ過程に属する．すなわち，時刻 t に系がある状態 $\{n_m\}$ を取る確率 $P(\{n_m\},t)$ はその直前の時刻の確率分布のみによって決まる．ただし，n_m はサイト m に入っている粒子数を示す．今のモデルでは離散時間で考えているので，確率分布の時間発展を定めるマスター方程式は

(3.1)

$$P(\{n_m\},t+1) - P(\{n_m\},t) = \sum_{\{n'_m\}\neq\{n_m\}} \Big[T(\{n_m\}|\{n'_m\})P(\{n'_m\},t) - T(\{n'_m\}|\{n_m\})P(\{n_m\},t)\Big]$$

により与えられる．ここで，$T(\{n_m\}|\{n'_m\})$ は状態 $\{n'_m\}$ から $\{n_m\}$ への遷移確率を表わす．さらに，この遷移確率を，あるサイト m を n_m 個の粒子が占めている場合にそこから ν_m 個の粒子が出て行く確率 $\phi(\nu_m|n_m)$ により表わすと

$$T(\{n_m\}|\{n'_m\}) = \sum_{\nu_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{\nu_M=0}^{n_M}\left[\prod_{m=1}^{M}\phi(\nu_m|n'_m)\prod_{k=1}^{M}\delta(\Delta n_k)\right] \tag{3.2}$$

となる．ただし，δ はデルタ関数で $\Delta n_k = n_k - n'_k + \nu_k - \nu_{k-1}$ はサイト k の粒子の増加量を示す．各サイトは同等であるから $\phi(\nu_m|n_m)$ はサイト番号に依らない．

非平衡系の定常状態は，その実現確率が $P(\{n_m\}, t+1) = P(\{n_m\}, t)$ という条件を満たすマスター方程式の解として定義される．この解を $P^*(\{n_m\})$ と書くことにすると，ZRP に対して，$P^*(\{n_m\})$ が (2.1) の積の形で与えられるために $\phi(\nu|n)$ が

$$\phi(\nu|n) = \frac{v(\nu)w(n-\nu)}{[v*w](n)} \tag{3.3}$$

という形になることが必要十分条件である．ただし，v および w は粒子数の関数で，$[v*w](n) = \sum_{\nu=0}^{n} v(\nu)w(n-\nu)$ はこれらの関数の畳み込みを表す．このとき，分配関数を与える因子 $f(n)$ は

$$f(n) = [v*w](n) \tag{3.4}$$

となる．このことは Evans らによって 2004 年に示された [4].

さらに，各関数 v, w を具体的に与えなくても $f(n)$ は $\phi(\nu|n)$ により得られる．このために，

$$\frac{\phi(\nu+1|n+2)\phi(\nu|n)}{\phi(\nu+1|n+1)\phi(\nu|n+1)} =: R(n) \tag{3.5}$$

とすると，この $R(n)$ は (3.4) により

$$R(n) = \frac{f(n+1)^2}{f(n+2)f(n)} \tag{3.6}$$

とも計算される．この漸化式は $f(n)$ について簡単に解くことができて

$$f(n) = f(0)\left(\frac{f(1)}{f(0)}\right)^n \prod_{j=0}^{n-2}\left[\prod_{k=0}^{j}\frac{1}{R(k)}\right] \qquad (n \geqslant 2) \tag{3.7}$$

となる．よって $R(n)$ が与えられれば良いことになるが，ZRP の場合は $\phi(0|n) = 1 - u(n)$, $\phi(1|n) = u(n)$, $\phi(k|n) = 0$ $(k > 1)$ であるから，

$$R(n) = \frac{u(n+2)(1-u(n))}{u(n+1)(1-u(n+1))} \tag{3.8}$$

となる．以上から (2.3) を得る [3].

4　ASEP の厳密解

既に述べたように ASEP は ZRP の特別な場合に相当する．一方で，ZRP の非平衡定常状態は形式的ではあるが厳密な表示を持つ．そこで，ASEP に対応する ZRP の分配関数を計算することにより ASEP の分配関数を求める．

4.1　ZRP の分配関数

まず，ZRP の場合について計算を進める．ここでは [2] に従って，因子 $f(n)$ を

$$f(n) = \begin{cases} 1 - u(1) & (n = 0) \\ \dfrac{1-u(1)}{1-u(n)} \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{1-u(j)}{u(j)} & (n \geq 1) \end{cases} \tag{4.1}$$

とする．((2.1) より $f(n)$ は c を定数として c^n 倍の不定性があるので，(2.3) において $u(1)f(1)/f(0) = 1$ として良い．また，$f(0)$ は任意に取ってよいがここでは便宜上 $1-p$ としている．)

ここで，$u(n)$ は前述の通り n 個の粒子が入ったサイトから一つの粒子が隣のサイトに移動する確率を与え，特に $u(0) = 0$ である．まず，(4.1) から次の漸化式を得る：

$$u(n+1)f(n+1) = f(n) - u(n)f(n). \tag{4.2}$$

この式は後に有用となる．非平衡定常状態における確率分布は (2.1) により与えられる．ここで，定常状態においてあるサイトに n 個の粒子が入っている確率 $p(n)$ は，$f(n)$ とは異なるということに注意すべきである．実際，この確率は (2.1) から

$$p(n) = \sum_{n_2+n_3+\cdots+n_M=N-n} P(\{n, n_2, \ldots, n_M\}) = f(n)\frac{Z_{M-1,N-n}}{Z_{M,N}} \tag{4.3}$$

により得られる．そして，$p(n)$ の n についての総和は定義により 1 だから我々は分配関数 $Z_{M,N}$ に対して次の漸化式を得る：

$$Z_{M,N} = \sum_{n=0}^{N} f(n) Z_{M-1,N-n}, \tag{4.4}$$

$$Z_{1,k} = f(k) \qquad (k \geq 1). \tag{4.5}$$

この漸化式により原理的には有限のシステムサイズ M, N に対して，分配関数を計算することが出来る．

次に，因子 $f(n)$ および分配関数 $Z_{M,N}$ の母函数 $\widehat{f}(\zeta) := \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\zeta^n$, $\widehat{Z}_M(\zeta) := \sum_{n=0}^{\infty} Z_{M,n}\zeta^n$ を考え，漸化式 (4.4) をこれらを用いて書き直すと

$$\widehat{Z}_M(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)\widehat{Z}_{M-1}(\zeta) \tag{4.6}$$

を得る．ここで，(4.4) が二つの添字 M, N に対する二重漸化式になっているのに対して，(4.6) は一つの添字 M のみの漸化式になっている．よって，(4.6) から

$$\widehat{Z}_M(\zeta) = \left(\widehat{f}(\zeta)\right)^M \tag{4.7}$$

を得る．

4.2 平均速度

ここで，ASEP の計算に入る前に交通流モデルの基本的な観測量である平均速度に対する表式を与えておく．

平均速度 $v_{M,N}$ は

$$v_{M,N} = \sum_{n=0}^{N} u(n)p(n) = \sum_{n=0}^{N} u(n)f(n)\frac{Z_{M-1,N-n}}{Z_{M,N}} \tag{4.8}$$

により分配関数から計算される．$u(n)$ に対する漸化式 (4.2) および (4.8) から

$$v_{M,N+1}Z_{M,N+1} = Z_{M,N} - v_{M,N}Z_{M,N} \tag{4.9}$$

を得る．（ここで，(4.2) との類似性が興味深いものである．）(4.9) を N に関して解くことにより，平均速度に対する表式

$$v_{M,N} = -\frac{\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n Z_{M,n}}{(-1)^N Z_{M,N}} \tag{4.10}$$

を得る．

4.3 ASEP の分配関数及び平均速度

ここから，ASEP の計算に入るために

$$u(0) = 0, \quad u(n) = p \qquad (0 < p < 1,\ n \geq 1) \tag{4.11}$$

とする．これによって ZRP が ASEP に対応することは先に述べたとおりである．(4.1) および (4.7) から分配関数の母函数は

$$\widehat{Z}_M(\zeta) = \left(\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \zeta^n\right)^M = \sum_{k=0}^{M} \binom{M}{k} \gamma^{M-k} \left(\frac{\beta\zeta}{1-\beta\zeta}\right)^k \tag{4.12}$$

となる．ただし，便宜上 $\gamma := 1-p$, $\beta := (1-p)/p$ と置いた．ここで，無限級数に対するオイラー変換 [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \frac{1}{1+z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n b_n \tag{4.13}$$

$$b_n := \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r \tag{4.14}$$

を用いると，(4.12) は以下のように変形できる：

$$\widehat{Z}_M(\zeta) = (1-\beta\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\beta\zeta)^n = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})(\beta\zeta)^n \tag{4.15}$$

ただし，

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \binom{M}{r} \gamma^{M-r} \tag{4.16}$$

である．ここでさらに右辺の係数に対して計算を進めると

$$b_n - b_{n-1} = \binom{M}{n} \gamma^{M-n} + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\binom{n}{r} - \binom{n-1}{r}\right] \binom{M}{r} \gamma^{M-r} = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} \binom{M}{r} \gamma^{M-r} \tag{4.17}$$

となる．また，$b_0 = \gamma^M$ である．従って，分配関数 $Z_{M,N}$ の母函数は

$$\widehat{Z}_M(\zeta) = \gamma^M + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} \binom{M}{r} \gamma^{M-r} \beta^n\right] \zeta^n \tag{4.18}$$

となる．以上から分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{M,N} =& \beta^N \sum_{r=1}^{N} \binom{N-1}{r-1} \binom{M}{r} \gamma^{M-r} \\ =& \beta^N \gamma^{M-1} M \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-N)_k (1-M)_k}{(2)_k (1)_k} \gamma^{-k} \\ =& \beta^N \gamma^{M-1} M F(1-N, 1-M; 2; \gamma^{-1}) \end{aligned} \tag{4.19}$$

と得られる．ただし，$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ は Pochhammer の記号で，また，$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ はガウスの超幾何級数 ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$ である．

平均速度を計算するために (4.10) の分子を先に計算しておく．これはパラメータに関するガウスの漸化式

(4.20) $$\gamma\left[F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)-F(\alpha,\beta;\gamma;z)\right]=\alpha zF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)$$

を用いて

(4.21)
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n Z_M(n) =&\gamma^M+\frac{(-p)^M M}{\gamma}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\gamma}{M}\left[F(M,n+1;1;\frac{1}{\gamma})-F(M,n;1;\frac{1}{\gamma})\right]\\ =&(-p)^M F(M,N;1;\frac{1}{1-p})\end{aligned}$$

となる．よって，平均速度は (4.10) から

(4.22) $$v_{M,N}=\frac{(p-1)F(M,N;1;1/(1-p))}{MF(M+1,N+1;2;1/(1-p))}$$

により与えられる．また，ASEP と見た場合の粒子密度が $M/(M+N)$ であることに注意すると，流量 $Q_{M,N}$ は

(4.23) $$Q_{M,N}=\frac{M}{M+N}v_{M,N}=\frac{(p-1)F(M,N;1;1/(1-p))}{(M+N)F(M+1,N+1;2;1/(1-p))}$$

と表わされる．

5 熱力学極限

統計力学の観点から，一般のパラメータ $(M{,}N)$ に対する表式を熱力学極限

(5.1) $$M,\ N\longrightarrow\infty\quad(\rho:=M/(M+N)\text{ は有限})$$

で展開することが望まれる．まず，$v_{M,N}$ の表式を対数微分に書き直す:

(5.2) $$v_{M,N}=\frac{z-1}{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\left(z(1-z)^{M+N}F\left(\begin{matrix}M+1,\ N+1\\2\end{matrix};z\right)\right).$$

ただし，$z=p/(1-p)$ とした．対数の引数にある関数に対する Riemann 図式は

(5.3)
$$z(1-z)^{M+N}P\left\{\begin{matrix}0&1&\infty&\\0&0&M+1&z\\-1&-M-N&N+1&\end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix}0&1&\infty&\\1&M+N&-N&z\\0&0&-M&\end{matrix}\right\}$$

であるから，対応する Fuchs 型微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1-M-N}{z-1}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\frac{MN}{z(z-1)}w=0 \tag{5.4}$$

従って，平均速度 $v_{M,N}$ は Riccati 方程式

$$\frac{p(p-1)}{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}v_{M,N}=v_{M,N}^2-\left(1+\frac{N}{M}\right)v_{M,N}+\frac{Np}{M}. \tag{5.5}$$

を満足する．よって，$L=M+N$ で展開した

$$v_{M,N}=v_0+v_1L^{-1}+v_2L^{-2}+\cdots \tag{5.6}$$

を代入することにより各項の係数を比べて，

$$v_0^2-\frac{1}{\rho}v_0+\frac{p(1-\rho)}{\rho}=0, \tag{5.7}$$

$$p(p-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}v_{j-1}=\sum_{\substack{k+l=j\\ k,l\geq 0}}\rho v_k v_l-v_j \qquad (j\geq 1). \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} v_{M,N}=&\frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2\rho}+\frac{(1-\rho)p(1-p)}{1-4p\rho(1-\rho)}L^{-1}\\ &+\frac{(1-\rho)p(1-p)\Big[1-2p+p(3p+1)\rho(1-\rho)\Big]}{\Big[1-4p\rho(1-\rho)\Big]^{5/2}}L^{-2}\\ &+\cdots. \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\lim_{L\to\infty}v_{M,N}=\frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2\rho}. \tag{5.10}$$

6　まとめ

本研究では ZRP と ASEP の対応関係に着目し，ZRP の分配関数に対する漸化式を利用することにより ASEP の分配関数を，任意のシステムサイズについて与えた．さらに，この分配関数がガウスの超幾何関数で表わされていることから，超幾何関数の公式を利用して平均速度および流量を算出した．

参考文献

[1] D. Chowdhury, L. Santen and A. Schadschneider, Statistical physics of vehicluar traffic and some related systems, Phys. Rep. 329(2000), 199-329.

[2] M. R. Evans, Exact steady states of disordered hopping particle models with parallel and ordered sequential dynamics, J. Phys. A 30(1997), 5669-5685.

[3] M. R. Evans and T. Hanney, Nonequilibrium statistial mechanics of the zero-range process and related models, J. Phys. A 38(2005), R195-R240.

[4] M. R. Evans, S. N. Majumdar and P. K. Zia, Factorized steady states in mass transport models, J. Phys. A 37(2006), L275-L280.

[5] 江沢　洋，漸近解析，岩波講座応用数学，岩波書店，東京，1995.

[6] D. Helbing, Traffic and related self-driven many-particle systems, Rev. Mod. Phys. 73(2001), 1067-1141.

[7] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro, Stochastic optimal velocity model and its long-lived metastability, Phys. Rev. E 72(2005), 035102.

[8] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro, Analytical study on the criticality of the stochastic optimal velocity model, J. Phys. A 39(2006), 2921-2933.

[9] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro *in preparation*

[10] T. Nagatani, The physics of traffic jams, Rep. Prog. Phys. 65(2002), 1331-1386.

[11] A. M. Povolotsky and J. F. F. Mendes, Bethe ansatz solution of discrete time stochastic processes with fully parallel update, cond-mat/0411558.