# 戸田格子と渋滞学

西成活裕 [1], 金井政宏 [2]

[1] 東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻 准教授, 科学技術振興機構「さきがけ」研究員

[2] 東京大学大学院数理科学研究科

## 1 はじめに

本年は戸田格子が発表されて 40 年にあたる年である。著者の一人（西成）はちょうど今年 40 歳であり、この偶然には不思議な運命を感じざるをえない。タイトルにある戸田格子と渋滞学というのもまた研究を進めていくうちに偶然につながったもので、まずはじめにこの不思議なつながりが生まれた経緯についてお話したい。

私は数学的な構造の良いものはいつかは現実に役に立つ、という信念を持って学生時代より数理科学の研究をしてきた。そして 10 年ぐらい前からこれを本気で世間に示したいと考えるようになり、そのときに出会ったのが戸田格子の超離散化である [1]。これは当時私がいた、いや正確には出入りしていた東京大・薩摩研究室で発見された大いなる成果であり、周囲もこぞってこの超離散化の研究を始めた。私はさっそくこの超離散法を可積分方程式だけでなく他の散逸系の方程式へ応用できないかと考え、その代表的な方程式であるバーガース方程式に適用してみた。これが運良くうまくいって、バーガース・セルオートマトン（BCA）という可解モデルを得ることができたのだ [2]。そしてある日、0 と 1 で表されたこのモデルの解をパソコンの画面で見ているうちに、それが車や人の動きに見えてきたのである。こうして一気にこれからやるべきことのイメージが浮かび、その夜はかなり興奮して寝られなかったのを覚えている。数理科学と現実とが直接私の頭につながった瞬間である。

それから 10 年間、数理科学をよりどころとして渋滞研究を進め、また現実の観測データ分析や渋滞実験までおこなった。こうして数理と現実の間でうまくバランスを保つように心がけながら応用研究をしてきた。そしてあるとき渋滞の数理解析をしている論文を何気なく読んでいたら、なんと戸田格子方程式が出てきたのは驚いてしまった [3]。これもまた運命であろうか。とにかくあっという間の 10 年だったが、2006 年にやっと一般向けに「渋滞学」という本をまとめることができた [4]。これが幸運にも講談社科学出版賞と日経 BP 社ビズテック賞をダブル受賞し、また多くのメディアに取りあげていただいたおかげで、ここ 2 年の間にまさに人生が変わったと言っても過言ではない。これも戸田格子との不思議な縁のおかげだろうか。それでは以下にこの経緯に沿って、２つのトピックについて解説をしたい。まずは BCA による渋滞現象解析であり、もう一つは論文 [3] に関連したテーマである。後者は著者の金井らが近年まとめた成果で、科学新聞の 1 面にとりあげられるなど大いに注目を浴びた結果である。

## 2 超離散戸田格子と BCA

戸田格子を粒子間距離 $r_n$ により表示すると

$$\ddot{r}_n = 2\mathrm{e}^{-r_n} - \mathrm{e}^{-r_{n-1}} - \mathrm{e}^{-r_{n+1}} \tag{1}$$

となる。この可積分性を保った差分方程式は

$$\begin{aligned} u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} &= \log\left(1+\delta^2(\mathrm{e}^{u_{n+1}^t}-1)\right) \\ &-2\log\left(1+\delta^2(\mathrm{e}^{u_n^t}-1)\right) \\ &+\log\left(1+\delta^2(\mathrm{e}^{u_{n-1}^t}-1)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

である [1]。ここで、$u_n^t = -r_n(\delta t)$ とおいて、$\delta \to 0$ とすると (2) は (1) になるのはすぐに分かる。このように差分と微分の対応が見えやすいため、戸田格子方程式は差分や超離散法を勉強するのにとても都合がよい。この (2) を見ると、**超離散公式**

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log \left( \exp(\frac{A}{\varepsilon}) + \exp(\frac{B}{\varepsilon}) \right) = \max(A, B) \quad (3)$$

が自然に浮かびあがってくる。この公式にしたがって (2) の極限をとろう。$u_n^t = U_n^t/\varepsilon$、$\delta = e^{-L/2\varepsilon}$ とおいて $\varepsilon \to +0$ とれば、超離散化された戸田格子

$$\begin{aligned} U_n^{t+1} - 2U_n^t + U_n^{t-1} &= \max(0, U_{n+1}^t - L) \\ -2\max(0, U_n^t - L) &+ \max(0, U_{n-1}^t - L) \quad (4) \end{aligned}$$

を得る。以上が戸田格子の超離散であるが、この手続きをバーガース方程式に適用してみよう。まず、バーガース方程式は

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (5)$$

である。これは**コウル=ホップ変換** $u = f_x/f$ によって線形化出来て、熱伝導方程式 $f_t = f_{xx}$ になることは良く知られている。さて、数学的な構造を保つために、直接 (5) を離散化するのではなく、まずは熱伝導方程式を以下のように差分する。

$$f_j^{t+1} - f_j^t = \delta(f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t) \quad (6)$$

ここで $\delta = \Delta t/\Delta x^2$ であり、$\Delta t$、$\Delta x$ はそれぞれ時間と空間の差分間隔である。次に $c$ を定数として

$$u_j^t = c\frac{f_{j+1}^t}{f_j^t} \quad (7)$$

というものを考える。これがコウル=ホップ変換の離散化に対応する。次に (7) を用いて (6) を $u$ のみで表すと

$$u_j^{t+1} = u_j^t \frac{1 - 2\delta + \delta(\frac{c}{u_j^t} + \frac{u_{j+1}^t}{c})}{1 - 2\delta + \delta(\frac{c}{u_{j-1}^t} + \frac{u_j^t}{c})} \quad (8)$$

となる。これが離散化されたバーガース方程式である。次に

$$u_j^t = \exp(\frac{U_j^t}{\varepsilon}) \quad (9)$$

とおいて、新たに小さい変数 $\varepsilon$ を導入する。さらに

$$\frac{1-2\delta}{c\delta} = \exp(-\frac{M}{\varepsilon}), \quad \frac{1}{c^2} = \exp(-\frac{L}{\varepsilon}) \quad (10)$$

とおいて、$\delta, c$ の代わりに $L, M$ を導入する。そして極限 $\varepsilon \to +0$ を考える。すると、先ほどの超離散公式より、(8) は

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} &= U_j^t - \max(-M, -U_{j-1}^t, -L + U_j^t) \\ &\quad + \max(-M, -U_j^t, -L + U_{j+1}^t) \quad (11) \end{aligned}$$

となる。これが超離散化されたバーガース方程式、すなわち BCA である。これは $\{0, 1, \cdots, L\}$ の $(L+1)$ 状態 3 近傍セルオートマトンと見なすことができる。ここで $L = M = 1$ と置いてみよう。この場合、全ての $U_j^t$ は 0 か 1 の値をとる。このとき BCA は**ルール184モデル**といわれ、交通流の離散モデルの基礎になっている [5]。このルールで 1 を動かした例が図 1 である。1 は前が空いているときのみ右に進んでいくが、前が詰まっているときは渋滞して動けないことが分かる。そして 1 のかたまり (渋滞部分) は後ろに伝播しており、実際の渋滞の特性をよくとらえている。私はこの発見をきっかけに渋滞学の研究を本格的に開始したのである。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

図 1： ルール184モデルによる時間発展の様子。上から下に向かって時間ステップが進行する。

## 3　交通流モデルと戸田格子

次に 1 次元交通流の微分方程式によるモデルを考える。各車は衝突を避けるために車間距離が詰まれば減速し、大きくなれば加速する。このような車の

挙動はあたかも前方の車とバネで繋がれているかのようである。しかし、ドライバーは主に前方の車の挙動に応じて運転するが、自分より後方の車にはほとんど注意を向けないであろう。つまり、『バネ』に引っ張られるのは後ろの車だけであって後ろの車は前の車を引っ張ることはない。さらに、この『バネ』はドライバーの反応速度にも大きく依存していて、先行する車の動きに反応するまでに遅れが生じる。

このように影響を受ける対象と与える対象が異なるという点で、交通流は戸田格子のようにバネで繋がれた質点系と一見全く異なっている。ところが、『交通流』と『バネで繋がれた質点系』という二つの現象を記述する方程式は、戸田先生に「この体系は力学的意味づけは出来ない」[6] と言われたカッツ＝メールベック系を通じで厳密解を共有することになる。

### 3.1 ニューウェル＝ウィザムモデル

上述のことを考慮した各車の運動法則を定める方程式としては、**時間遅れ追従型モデル**

$$\dot{x}_n(t) = V(h_n(t-\tau)) \tag{12}$$

が標準的である。時刻 $t$ での $n$ 番目の車の位置を $x_n(t)$、先行する車（$n{+}1$ 番）との車間距離を $h_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ で表している。$V(h)$ は**最適速度関数**と呼ばれる、車間距離に対して『最適な速度』を与える関数である。すなわち、(12) は現在の速度（右辺）が**時間遅れ** $\tau$ の分だけ過去の最適速度（左辺）に一致するというモデルである。

最適速度関数を

$$V(h) = V_0\left[1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{V_0}(h - L_0)\right)\right] \tag{13}$$

としたものを**ニューウェル＝ウィザムモデル** [7, 3] と呼ぶことにする（以下，NW モデルと略記）。$V_0, \gamma, L_0$ は車やドライバーの特性によって決まる定数である。NW モデルを車間距離 $h_n$ のみで表示すると

$$\dot{h}_n(t+\tau) = V(h_{n+1}(t)) - V(h_n(t)) \tag{14}$$

であるが、$s_n(t) = (\gamma/V_0)(h_n(t) - L_0)$ と変数変換すると (14) は

$$\frac{1}{\gamma}\dot{s}_n(t+\tau) = \mathrm{e}^{-s_n} - \mathrm{e}^{-s_{n+1}} \tag{15}$$

となる。以降この式で NW モデルを考察する。

NW モデル (15) については、可積分系である**カッツ＝メールベック系** [8]

$$\dot{R}_j = \mathrm{e}^{-R_{j-1}} - \mathrm{e}^{-R_{j+1}} \tag{16}$$

と対比することにより厳密解を求めることが出来る。(15) と (16) はそれぞれで進行波

$$\begin{aligned} s(\phi) &= s_n(t), \quad \phi = \gamma(t + 2n\tau) \\ R(\Phi) &= R_j(t), \quad \Phi = t + \beta j \quad (\beta = \gamma\tau) \end{aligned} \tag{17}$$

を仮定すればともに

$$\dot{s}(\phi) = \mathrm{e}^{-s(\phi-\beta)} - \mathrm{e}^{-s(\phi+\beta)} \tag{18}$$

という方程式に帰着される。後述のように，(18) の解は戸田格子の楕円解から

$$\mathrm{e}^{s(\phi)} = \frac{[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,\beta\,\mathrm{sn}^2(\phi+\beta)][1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,\beta\,\mathrm{sn}^2\,\phi]}{2\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta} \tag{19}$$

と得られる。ただし、各楕円関数の母数は $k$ である。

戸田は非線形格子で特解を持つものを構成するために楕円関数に着目した。そして、$\mathrm{sn}^2$ の公式

$$\mathrm{sn}^2(u+v) - \mathrm{sn}^2(u-v) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}^2\,v}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,v} \tag{20}$$

から

$$Z(u) = \int_0^u \mathrm{dn}^2\,u\mathrm{d}u - \frac{E}{K}u \tag{21}$$

（$K = K(k), E = E(k)$ は第 1 種および第 2 種の完全楕円積分）に対して

$$\begin{aligned} &Z(u+v) + Z(u-v) - 2Z(u) \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\left(1 + \frac{\mathrm{d}Z(u)/\mathrm{d}u}{1/\mathrm{sn}^2\,v - 1 + E/K}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

が成り立つことを見出し、さらに

$$\begin{aligned} u &= 2K(\nu t \pm n/\lambda), \quad v = 2K/\lambda \\ \mathrm{e}^{-r_n} &= 1 + \dot{s}, \quad s_n(t) = 2K\nu Z(u) \end{aligned} \tag{23}$$

と置くことにより戸田格子方程式 (1) を得た。ただし、$\nu, \lambda$ はそれぞれ周期解の振動数と波長にあたるパラメータである。従って、戸田格子は必然的に

$$\mathrm{e}^{-r_n} = 1 + (2K\nu)^2(\mathrm{dn}^2\, u - E/K) \qquad (24)$$

という楕円関数で表される周期解を持つ。(実は、Riemann の $\vartheta$ 関数による一般解が得られている [6]。)

### 3.2 カッツ＝メールベック系と戸田格子のベックルント変換

カッツ＝メールベック系 [8]（以下，KvM 系と略記）は初め確率過程の研究の中で見出されたが、すぐに戸田格子のベックルント変換を与えることが指摘された。ベックルント変換とは微分方程式の異なる解の間の変換、あるいはこれらを結びつける低次の微分方程式を指す。

KvM 系 (16) に対して $w_j = R_j + R_{j+1}$ と置くと、$\ddot{w}_j = 2\mathrm{e}^{-w_j} - \mathrm{e}^{-w_{j-2}} - \mathrm{e}^{-w_{j+2}}$ を得る。これは (1) と同じ式であるから、$r_n = w_{2n}, r'_n = w_{2n+1}$ とすれば、$\{r_n\}, \{r'_n\}$ はそれぞれ戸田格子の解となる。そして、$r_n = y_{n+1} - y_n, r'_n = y'_{n+1} - y'_n$ とすれば、$A, \alpha$ を任意定数として

$$\begin{cases} \dot{y}_n = A\mathrm{e}^{-(y'_n - y_n)} + \dfrac{1}{A}\mathrm{e}^{-(y_n - y'_{n-1})} - \alpha \\ \dot{y}'_n = A\mathrm{e}^{-(y'_n - y_n)} + \dfrac{1}{A}\mathrm{e}^{-(y_{n+1} - y'_n)} - \alpha \end{cases} \qquad (25)$$

を得る。(25) を戸田格子のベックルント変換という。以上の関係から、戸田格子の周期解 (24) から KvM 系の解を経て NW モデルの厳密解 (19) が得られる。

### 3.3 広田の方法による解法

最後に、広田の方法 [9] による NW モデルの解法を示す [10]。広田の方法はソリトン方程式を初等的に解くために考案された方法であったが、可積分系以外の非線形方程式に対しても威力を発揮する。(15) において

$$s_n(t) = f_n(t)/g_n(t) \qquad (26)$$

と置き、$f = f_n(t)$, $f^{\pm} = f_n(t \pm \tau)$, $f_+ = f_{n+1}(t)$ などと書くことにすると、

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\dot{f}g - f\dot{g}}{fg} = \frac{f_+^- g^- - f^- g_+^-}{g_+^- g^-} \qquad (27)$$

となる。よって、分離パラメータを $\lambda$ として双線形形式

$$\begin{cases} \dot{f}g - f\dot{g} = \lambda(f_+^- g^- - f^- g_+^-) \\ \gamma fg = \lambda g_+^- g^- \end{cases} \qquad (28)$$

を得る。双線形形式では特解の推定が著しく簡単になっている。ソリトン方程式の場合 [9] を参考にして、(28) で $f = A_1 + A_2\mathrm{e}^{bt+an}$, $g = B_1 + B_2\mathrm{e}^{bt+an}$ と置いて各定数を決定すれば、任意定数 $b$ を含む衝撃波

$$\mathrm{e}^{s_n(t)} = \frac{\gamma\sinh(b\tau)}{b}\frac{\cosh(b(t+n\tau))}{\cosh(b(t+(n-1)\tau))} \qquad (29)$$

を得る。

## 4 まとめ

本稿では、戸田格子と渋滞学との不思議な関係について、BCA モデル、そして NW モデルの２つの話題を紹介した。現在、渋滞研究はこれらの数理を基盤にしてかなりの発展を見せており、数理科学を直接社会現象へ応用する第一歩ができたと確信している。厳密な可積分数理に基づく結果は何よりも信頼性が高く、そのため実測に近い結果を理論モデルから引き出すことができる。これこそが数学の力であり、今後はますます良い数学的構造を持つものが現実の問題解決に活用されていくことを期待している。

## 参考文献

[1] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, “Toda-type Cellular Automaton and its N-soliton solution”, Phys. Lett. A **225** (1997) p.287.

[2] K. Nishinari and D. Takahashi, "Analytical Properties of Ultradiscrete Burgers Equation and Rule-184 Cellular Automaton", J. Phys. A **31** (1998) p.5439.

[3] G. B. Whitham, "Exact Solutions for a Discrete System Arising in Traffic Flow", Proc. R. Soc. Lond. A**428** (1990) p.49.

[4] 西成活裕 「渋滞学」 (新潮選書,2006)

[5] D. Chowdhury, L. Santen and A. Schadschneider, "Statistical physics of vehicular traffic and some related systems", Phys. Rep., **329** (2000) p.199.

[6] 戸田盛和,『非線形格子力学』, 岩波書店 (1978).

[7] G. F. Newell, "Nonlinear effects in the dynamics of car-following", Oper. Res. **9** (1961) p.209.

[8] M. Kac and P. van Moerbeke, "On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices", Adv. Math. **16** (1975) p.160.

[9] 広田良吾,『ソリトンの数理』, 岩波書店 (1992).

[10] Y. Tutiya and M. Kanai, "Exact shock solution of a coupled system of delay differential equations: a car-following model", J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) p.083002.