

## 集中講義『物理学特別講義第一』レポート問題

担当：金井 政宏

### 1. リトルの公式

待ち人数 = 待ち時間 × 到着率

について、仮定されている条件などを補って説明せよ。

### 2. サイト数 $M$ ，粒子数 $N$ の zero-range process の確率分布は

$$P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{\prod_{i=1}^M f(n_i)}{Z_{MN}}, \quad f(n) = \frac{1-u(1)}{1-u(n)} \prod_{j=1}^n \frac{1-u(j)}{u(j)},$$
$$Z_{MN} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_M=0}^{\infty} \prod_{l=1}^M f(n_l) \delta_{n_1+n_2+\dots+n_M, N}$$

と与えられる。このとき以下の問いに答えよ。

(a) 次の漸化式が成り立つことを示せ。

$$u(n+1)f(n+1) = f(n) - u(n)f(n)$$

(b) サイト 1 に粒子が  $n$  入っている確率を

$$p(n) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_M=0}^{\infty} P(n, n_2, \dots, n_M)$$

により定義した。

$$p(n) = f(n) \frac{Z_{M-1, N-n}}{Z_{MN}}$$

を示せ。

(c) 平均速度を

$$v_{MN} = \sum_{n=0}^N u(n)p(n)$$

により定義する。このとき

$$v_{M, N+1} Z_{M, N+1} = Z_{MN} - v_{MN} Z_{MN}$$

を示せ。

(d) 次の式が成り立つことを示せ。

$$v_{MN} = - \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n Z_{Mn}}{(-1)^N Z_{MN}}$$