物理学特別講義第二

鈴木　淳史

静岡大学 理学部

２０１７年 １０月　中央大学

転送行列による定式化

可換性と保存量

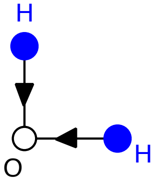
ヤン・バクスター方程式

R 行列

頂点模型の例

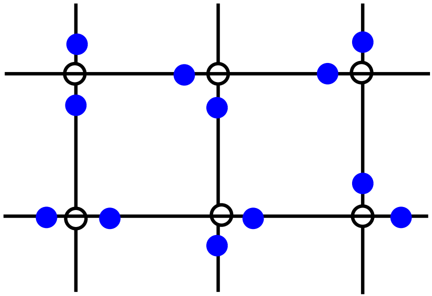
頂点模型
＝正方格子の各頂点で可能な配置と対応するボルツマン重率が指定された模型

- 氷。熱力学の第３法則、残留エントロピーの問題 (ポーリング)



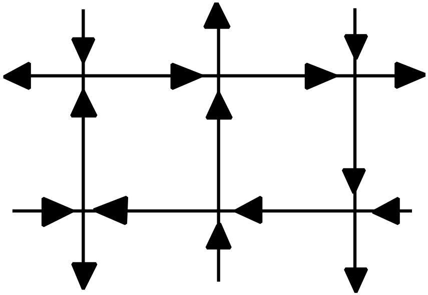
頂点模型の例

- 氷模型
  - O 原子をすべての格子点の上におく
  - H 原子をボンドの上におく
  - 反発力のため同じボンドの上に 2 つの H 原子はおけない
- $\Rightarrow$ 全てのボンドの上に矢印がおかれ、一つの頂点には 2 つの矢印が ” 流れ込んで ” 2 つの矢印が ” でていく ”



頂点模型の例

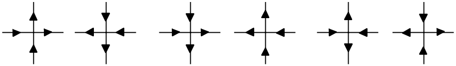
- 氷模型
  - O 原子をすべての格子点の上におく
  - H 原子をボンドの上におく
  - 反発力のため同じボンドの上に 2 つの H 原子はおけない
- ⇒ 全てのボンドの上に矢印がおかれ、一つの頂点には 2 つの矢印が ” 流れ込んで ” 2 つの矢印が ” でていく ”



頂点模型の例

- 氷模型
  - O 原子をすべての格子点の上におく
  - H 原子をボンドの上におく
  - 反発力のため同じボンドの上に 2 つの H 原子はおけない
- $\Rightarrow$ 全てのボンドの上に矢印がおかれ、一つの頂点には 2 つの矢印が " 流れ込んで " 2 つの矢印が " でていく "

  可能な配置

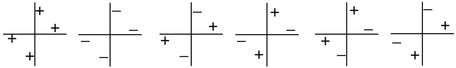


可積分でもっとも一般的なボルツマン重率: 5 parameters
6 頂点模型という。

頂点模型の例

- 氷模型
  - O 原子をすべての格子点の上におく
  - H 原子をボンドの上におく
  - 反発力のため同じボンドの上に 2 つの H 原子はおけない
- ⇒ 全てのボンドの上に矢印がおかれ、一つの頂点には 2 つの矢印が ” 流れ込んで ” 2 つの矢印が ” でていく ”

  可能な配置 (右向き（上むき) 矢印=+, 左向き（下むき) 矢印= +)



  可積分でもっとも一般的なボルツマン重率: 5 parameters
  6 個の可能な配置があるので 6 頂点模型という。
  （この講義ではこの模型だけ考える。）

転送行列による定式化 1

- 定義　$\otimes$: 例 （複数の $\otimes$ 積は再帰的に定義)
  - v_1, v_2 2 成分 ベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \qquad v_1 \otimes v_2 = \begin{pmatrix} av_2 \\ bv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA \\ aB \\ bA \\ bB \end{pmatrix}$$

  - A, B: 2×2 行列

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B \\ A_{21}B & A_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{21}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{21}B_{21} & A_{22}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{12} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

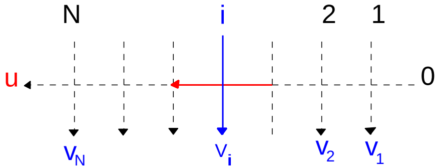
- 性質 $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1 . A_2) \otimes (B_1 . B_2)$

転送行列による定式化 2

簡単のため頂点模型に話を限る。また変数は $\{1, 2, \cdots, n\}$ に値をとるものとして $\{1, 2, \cdots, n\}$ よりなる空間を V で表す。

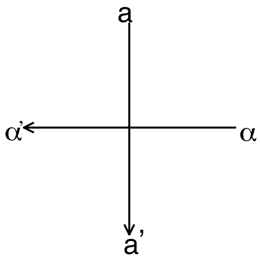
定義　L 行列：局所的ボルツマン重率をあらわすための行列

- V_i 垂直方向の (右から i 番目の) ボンド上の状態空間 (spectral parameter v_i)
- V_0 水平方向のボンド上の状態空間 (auxiliary space) (spectral parameter u)
- $L_i : \mathrm{End}(V_0 \otimes V_i)$



転送行列による定式化　3

- 頂点模型: 一つの頂点のボルツマン重率 $w(a', \alpha' | a, \alpha || u, v)$

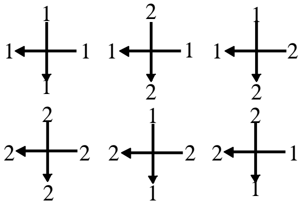


- : 定義
  - Local Lax 行列 : 行列要素 $(e_{j,k})_{\ell,m} = \delta_{j,\ell}\delta_{k,m}$ を用いて

$$L_i = \sum_{a,a',\alpha,\alpha' \in \mathcal{S}} w(a', \alpha' | a, \alpha || u, v_i) e^{(0)}_{\alpha',\alpha} \otimes e^{(i)}_{a',a}$$

転送行列による定式化　4

例:　6 頂点模型
edge 上に ice rule を満たすように + (1) か - (2)
可能な配置と頂点重率



$$a(u,v)=\rho[1+u-v] \quad b(u,v)=\rho[u-v] \quad c(u,v)=\rho[1]$$

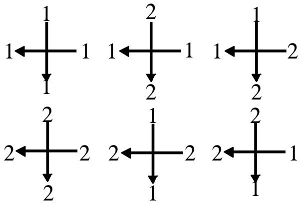
$$[x]=\frac{q^x-q^{-x}}{q-q^{-1}}$$

転送行列による定式化　4

例:　6 頂点模型

edge 上に ice rule を満たすように + (1) か - (2)

可能な配置と頂点重率



$$\alpha(u,v) := \frac{1}{2}([u-v+1]+[u-v]), \beta(u,v) := \frac{1}{2}([u-v+1]-[u-v])$$

$$L_i(u,v_i) = \rho \begin{pmatrix} \alpha(u,v_i)I + \beta(u,v_i)\sigma_i^z & \sigma_i^- \\ \sigma_i^+ & \alpha(u,v_i)I - \beta(u,v_i)\sigma_i^z \end{pmatrix}$$

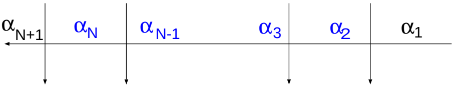
転送行列による定式化　5

- 定義　モノドロミー行列

$$\mathcal{T}(u,\{v\}) := L_N L_{N-1} \cdots L_1$$

- monodromy 行列 $\mathcal{T}$: は「下つき添え字」α_{N+1},α_1 でラベルされる。(青字に対しては和をとる)。
  6 頂点模型に対しては 2×2 行列となる

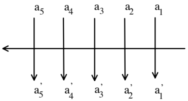
$T_{\alpha_{N+1}\alpha_1} =$



$\mathcal{T}_{\alpha',\alpha}$ は quantum space $V_N \otimes V_{N-1} \otimes \cdots \otimes V_1$ に働く作用素

転送行列による定式化　6

- 定義: quantum space $V_N \otimes V_{N-1} \otimes \cdots \otimes V_1$ に働く
  $T(u,\{v\}) = \mathrm{tr}_{V_0} \mathcal{T}$ を周期的境界条件下での列転送行列という
- $T(u,\{v\})$ は「上付き添え字（の集合）」で指定される。
  $T^{\{a'\},\{a\}} = \sum_\alpha \mathcal{T}^{\{a'\},\{a\}}_{\alpha,\alpha}$



- 分配関数 Z: 縦に M 列ならんでいる周期系の分配関数 Z

$$Z(u,\{v\}) = \sum_{\{a\}} (T^M(u,\{v\}))^{\{a\},\{a\}}$$

- T の固有値を $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots$ とすると、

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \log Z(u,\{v\}) = \lambda_1(u,\{v\})$$

可換性と保存量

- 2 つの転送行列 $T(u), T(u')(\{v_j\}$ は省略) に対して
  $\boxed{[T(u), T(u')] = 0 \text{ を要請する}}$
  これは任意の関数 F に対して $[T(u), F(T(u'))] = 0$ を意味する。
- 要請の意味
  - 力学系における保存量　I_j : $\{\mathcal{H}, I_j\} = 0$
  - 格子模型の保存量　I_j : $[T(u), I_j] = 0$

可換性と保存量

- 2つの転送行列 $T(u), T(u')$($\{v_j\}$ は省略) に対して
  $\boxed{[T(u), T(u')] = 0 \text{ を要請する}}$
  これは任意の関数 F に対して $[T(u), F(T(u'))] = 0$ を意味する。
- 要請の意味
  - 力学系における保存量　$I_j : \{\mathcal{H}, I_j\} = 0$
  - 格子模型の保存量　$I_j : [T(u), I_j] = 0$

  $\log T(u') = \sum_{j=0} (u')^j I_j$（ただし $v_i = 0$）とすれば要請は十分に多くの保存量 $\{I_j\}$ の存在 ($\sim$ 可積分性) を意味する。
  さらにそれらは可換である。 $[I_k, I_j] = 0$.
- 例 (6頂点模型) $I_0 = P, I_1 = \mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}} \cdots$.

可換性とヤン・バクスター方程式 1

$T(u), T(v)$ の auxiliary space をそれぞれ V_0, V_0' とするならば

$$T(v)T(u) = \mathrm{tr}_{V_{0'}\otimes V_0}\mathcal{T}(v)\mathcal{T}(u)$$

$$\left(T(v)T(u)\right)^{\{a''\},\{a\}} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_1'\\ \{a'\}}} \mathcal{T}(v)^{\{a''\},\{a'\}}_{\alpha_1',\alpha_1'}\mathcal{T}(u)^{\{a'\},\{a\}}_{\alpha_1,\alpha_1}$$

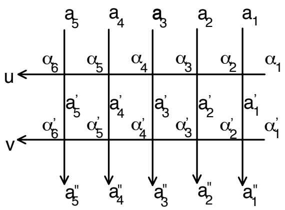
可換性とヤン・バクスター方程式 1

$T(u), T(v)$ の auxiliary space をそれぞれ V_0, V_0' とするならば

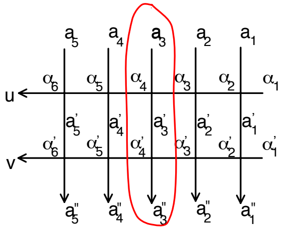
$$T(v)T(u) = \mathrm{tr}_{V_{0'} \otimes V_0} \mathcal{T}(v)\mathcal{T}(u)$$

$$\big(T(v)T(u)\big)^{\{a''\},\{a\}} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_1' \\ \{a'\}}} \mathcal{T}(v)^{\{a''\},\{a'\}}_{\alpha_1',\alpha_1'} \mathcal{T}(u)^{\{a'\},\{a\}}_{\alpha_1,\alpha_1}$$

$T(v)T(u)$ の図形的解釈

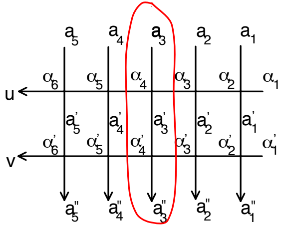


可換性とヤン・バクスター方程式 2



$$
\begin{aligned}
&\left(\mathcal{T}(v)\right)_{\alpha_1',\alpha_1'}\left(\mathcal{T}(u)\right)_{\alpha_1,\alpha_1} \\
&= \sum_{\substack{\{\alpha\},\{,\alpha'\} \\ \{a'\}}} \prod_{i=1}^{N} L^{a_i'',a_i'}_{\alpha_{i+1}',\alpha_i'}(v) L^{a_i',a_i}_{\alpha_{i+1},\alpha_i}(u) \\
&= \sum \prod_{i=1}^{N} [L_i(v)\otimes L_i(u)]^{\alpha_{i+1},\alpha_i}_{\alpha_{i+1}',\alpha_i'}
\end{aligned}
$$

可換性とヤン・バクスター方程式 2

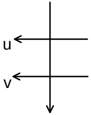


$$\left(\mathcal{T}(v)\right)_{\alpha_1',\alpha_1'}\left(\mathcal{T}(u)\right)_{\alpha_1,\alpha_1}$$

$$= \sum_{\substack{\{\alpha\},\{,\alpha'\}\\ \{a'\}}} \prod_{i=1}^{N} L^{a_i'',a_i'}_{\alpha_{i+1}',\alpha_i'}(v)\, L^{a_i',a_i}_{\alpha_{i+1},\alpha_i}(u)$$

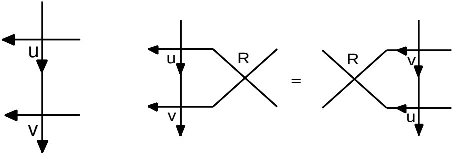
$$= \sum \prod_{i=1}^{N} [L_i(v) \otimes L_i(u)]^{\alpha_{i+1},\alpha_i}_{\alpha_{i+1}',\alpha_i'}$$

よって $[L(v) \otimes L(u)] \Leftrightarrow$

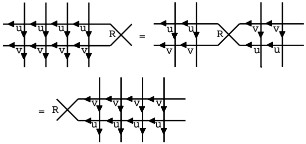


可換性とヤン・バクスター方程式 3

もし局所的に図のようにふたつの L 行列を入れ替える、$n^2 \times n^2$ 行列 $R(u,v)$ が存在したならば



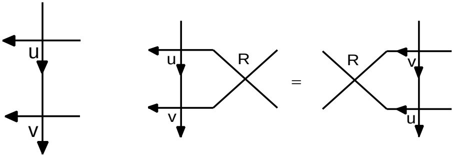
２つのモノドロミー行列は上下入れ替えられる。



.

可換性とヤン・バクスター方程式 3

もし局所的に図のようにふたつの L 行列を入れ替える、$n^2 \times n^2$ 行列 $R(u, v)$ が存在したならば



数式による表現　ヤン・バクスター方程式

$$[L_i(v) \otimes L_i(u)]R(u, v) = R(u, v)[L_i(u) \otimes L_i(v)]$$

global Yang-Baxter

$$\mathcal{T}(v)\mathcal{T}(u)R(u, v) = R(u, v)\mathcal{T}(u)\mathcal{T}(v)$$

可換性とヤン・バクスター方程式 4

命題

ヤン・バクスター方程式により転送行列の可換性は保証される。

$$
\begin{aligned}
T(v)T(u) &= \mathrm{tr}_{V_{0'}\otimes V_0}\mathcal{T}(v)\mathcal{T}(u) \\
&= \mathrm{tr}_{V_{0'}\otimes V_0}\mathcal{T}(v)\mathcal{T}(u)R(u,v)R^{-1}(u,v) \\
&= \mathrm{tr}_{V_{0'}\otimes V_0}R^{-1}(u,v)\mathcal{T}(v)\mathcal{T}(u)R(u,v) \quad \because \text{トレースの性質} \\
&= \mathrm{tr}_{V_0\otimes V_{0'}}R^{-1}(u,v)R(u,v)\mathcal{T}(u)\mathcal{T}(v) \quad \because \text{ヤン・バクスター方程式} \\
&= T(u)T(v)
\end{aligned}
$$

R 行列とヤン・バクスター方程式

問題　　ヤン・バクスター方程式をみたす R をいかに見つけるか？。

- 経験則　R の行列要素は L からつくれる。
  置換演算子 $P : V \otimes W \to W \otimes V$ を用いて

$$R(u, v) = R(u - v) = L(u - v)P$$

R 行列とヤン・バクスター方程式

問題　ヤン・バクスター方程式をみたす R をいかに見つけるか？。

- 経験則　R の行列要素は L からつくれる。
  置換演算子 $P : V \otimes W \to W \otimes V$ を用いて

$$R(u,v) = R(u-v) = L(u-v)P$$

$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ に働く　演算子 $L_{i,j}$ を考える。このときヤン・バクスター方程式は次と同値である。

$$L_{2,3}(v)L_{1,3}(u+v)L_{1,2}(v) = L_{1,2}(v)L_{1,3}(u+v)L_{2,3}(v)$$

R 行列とヤン・バクスター方程式

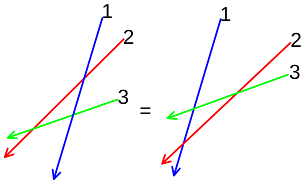
問題　　ヤン・バクスター方程式をみたす R をいかに見つけるか？。

- 経験則　R の行列要素は L からつくれる。
  置換演算子 $P : V \otimes W \to W \otimes V$ を用いて

$$R(u,v) = R(u-v) = L(u-v)P$$

ヤン・バクスター方程式は R を用いた次とも同値である。

$$(1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u)) = (R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1)$$



R 行列とヤン・バクスター方程式

問題　ヤン・バクスター方程式をみたす R をいかに見つけるか？。

- 経験則　R の行列要素は L からつくれる。
  置換演算子 $P : V \otimes W \to W \otimes V$ を用いて

$$R(u, v) = R(u - v) = L(u - v)P$$

- レポート 1:
  転送行列による定式化 4 にある L 等を用いて 6 頂点模型でヤン・バクスター方程式が成立することを確かめよ。($v_i = 0$ として良い)

R 行列と量子群

R に関する三次方程式 (YBE) をとくのは難しい。しかしながら次の事実がある。

Theorem (神保)

アフィン量子群 $\widehat{U}_q(\mathfrak{g})$ の作用 $\Delta(\mathfrak{g})$ と交換する $R^\vee$ より YBE の三角関数解は得られる。

$$[\Delta(\mathfrak{g}), R^\vee] = 0$$

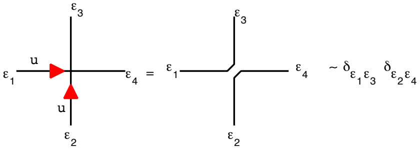
Schur の補題と組みあわせることにより、線形方程式をとけば YBE の三角関数解は得られる。

以下の議論では一般の R 行列は必要としない。 6 頂点模型だけで十分です。

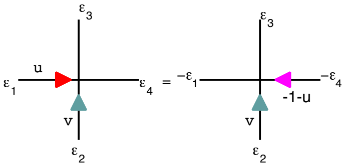
R 行列の重要な性質

これらは今後たびたび使うので覚えておいてほしい。

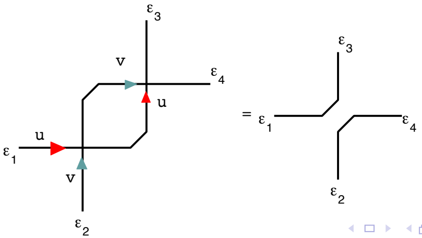
the standar initial condition



crossing symmetry



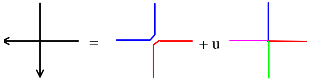
unitarity



保存量 revisit 1

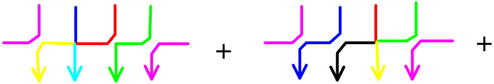
- $logT(u) = I_0 + uI_1 + \cdots$ なる $\{I\}$ は保存量。
  $(I_0 = \log T(0), I_1 = T'(0)T^{-1}(0))$
- Standard initial condition より $T(0)(T^{-1}(0))$ は一格子点の並進演算子 $\mathrm{e}^{ip}(\mathrm{e}^{-ip})$ に等しい。(p は運動量)

- さらに展開の一次の項まで考えると。。

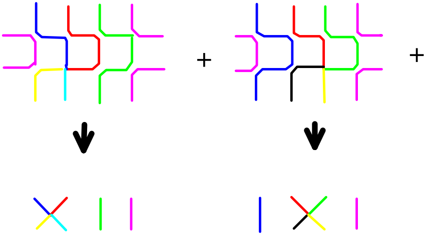


保存量 revisit 2

- $T'(0)$ は 2 体相互作用の和でかける。

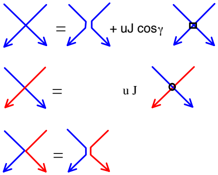


- よって I_1 は 2 体相互作用の和でかける。これを対応する量子系のハミルトニアンと解釈する。



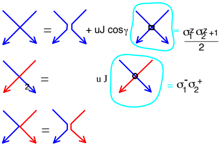
保存量 revisit 2

$T(u)$ が 6 頂点模型の転送行列なら (青 $+$, 赤 $-$)



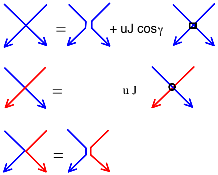
ハミルトニアンは *XXZ* 模型

$$q = \begin{cases} e^{i\gamma} & J = 1/\sin(\gamma), \Delta = \cos\gamma (\text{massless}) \\ e^{-\gamma} & J = 1/\sinh(\gamma), \Delta = \cosh\gamma (\text{massive}) \end{cases}$$



保存量 revisit 2

$T(u)$ が 6 頂点模型の転送行列なら (青 $+$, 赤 $-$)



ハミルトニアンは XXZ 模型

$$H_{XXZ} = \frac{J}{2} \sum_i \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta(\sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + 1) \right)$$

保存量 revisit 3

まとめ

- YBE は列転送行列の可換性を保証し可積分性を意味する。
- YBE は 可換な保存量の存在を保証
- $T_{\mathrm{6V}}(u,\{v_j=0\}) \sim \mathrm{e}^{iP}\mathrm{e}^{uH_{\mathrm{xxz}}}$ for $|u| \ll 1$