物理学特別講義第二
その２

鈴木　淳史

静岡大学 理学部

２０１７年 １０月　中央大学

量子逆散乱法

対角化

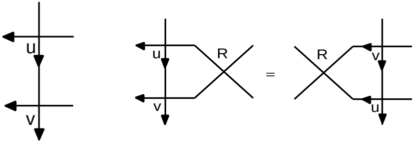
Bethe Ansatz

QISM 量子逆散乱法 I

- 主問題：熱力学的極限で分配関数 Z を評価したい。（以下 6V 模型に話を限り簡単のため $v_i = 0$)
- 転送行列 T の固有値を $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots$ とすれば、$Z = \Lambda_1^M + \Lambda_2^M + \cdots$
- よって 転送行列 T の固有値問題 $T\psi = \Lambda\psi$ は重要。
- ２次元古典系としてだけでなく、一次元量子系としてもこれは大事。

  $[H, T(u)] = 0$ より ψ は $\mathcal{H}\psi = E\psi$ を同時に満足する。
-

主張：ヤン・バクスター方程式は、転送行列の対角化にも有効である。



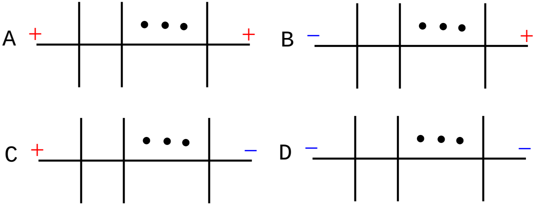
$$[L_i(v) \otimes L_i(u)]R(u-v) = R(u-v)[L_i(u) \otimes L_i(v)]$$

QISM 2

- モノドロミー行列 $\mathcal{T}$: $T = \mathrm{tr}\mathcal{T}$
  $\mathcal{T}$ は $V_0 \otimes V_N \otimes \cdots \otimes V_1$ に作用する。これを V_0 の元を脚とする行列と考える。
- 6 頂点模型の場合 $\mathcal{T}$ の 2× 2 行列表現

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}_0$$

で $A(u), B(u), C(u), D(u)$ は $V_N \otimes \cdots \otimes V_1$ に作用する演算子



QISM 3

具体的には

$$A(u) = \prod_j (\alpha(u) I + \beta(u)\sigma_i^z) + \sum_{k,\ell} (\sigma_k^- \sigma_\ell^+ + \sigma_k^- \sigma_\ell^+) \prod_{j \neq k,\ell} (\alpha(u) I + \beta(u)\sigma_i^z) + \cdots$$

$$B(u) = \sum_k \sigma_k^- \prod_{i \neq k} (\alpha(u) I + \beta(u)\sigma_i^z) + \cdots$$

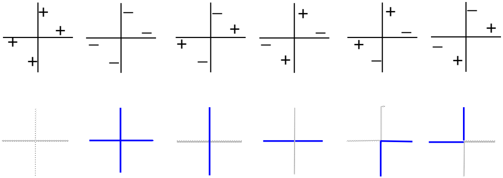
$$C(u) = \sum_k \sigma_k^+ \prod_{i \neq k} (\alpha(u) I + \beta(u)\sigma_i^z) + \cdots$$

$$D(u) = \prod_j (\alpha(u) I - \beta(u)\sigma_i^z) + \sum_{k,\ell} (\sigma_k^- \sigma_\ell^+ + \sigma_k^- \sigma_\ell^+) \prod_{j \neq k,\ell} (\alpha(u) I - \beta(u)\sigma_i^z) + \cdots$$

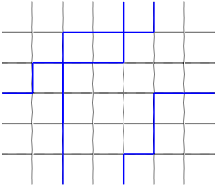
元の σ_k^a を $A \sim D$ で表すことを「逆問題をとく」という。

QISM 4

- Graphical な意味。　6 頂点模型の読み替え

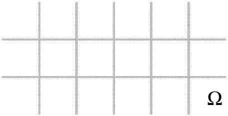


青:「粒子」の軌跡。
性質: 周期境界条件下で縦方向の粒子数は保存する。



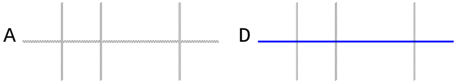
QISM 5

- 定義　真空 (Vaccum) $|\Omega\rangle = |1,1,\cdots,1\rangle (= |+,+,\cdots,+\rangle)$



- $|\Omega\rangle$ は $A(u), D(u)$ の固有ベクトル。

$$A(u)|\Omega\rangle = a(u)|\Omega\rangle, \quad D(u)|\Omega\rangle = d(u)|\Omega\rangle$$

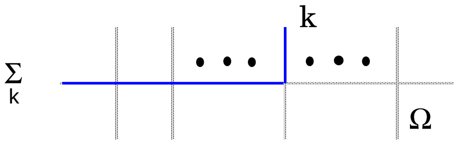


$a(u)$, $d(u)$ を真空期待値 (Vacuum Expecation Value) と言ったりする。

QISM 6

- $C(u)$ は「消滅演算子」 $B(u)$ は「生成演算子」

$$C(u)|\Omega\rangle = 0, \quad B(u)|\Omega\rangle = \text{new state}$$



QISM 7

- 主張　A, B, C, D のなす代数は R 行列によってユニークに決まる。

QISM 7

- 主張　A, B, C, D のなす代数は R 行列によってユニークに決まる。ヤン・バクスター方程式よりモノドロミー行列間の関係式

$$[\mathcal{T}(v) \otimes \mathcal{T}(u)]R(u-v) = R(u-v)[\mathcal{T}(u) \otimes \mathcal{T}(v)]$$

QISM 7

- 主張　A, B, C, D のなす代数は R 行列によってユニークに決まる。
  ヤン・バクスター方程式よりモノドロミー行列間の関係式

$$[\mathcal{T}(v) \otimes \mathcal{T}(u)]R(u-v) = R(u-v)[\mathcal{T}(u) \otimes \mathcal{T}(v)]$$

$$\mathrm{lhs} = \begin{pmatrix} A(v)A(u) & A(v)B(u) & B(v)A(u) & B(v)B(u) \\ A(v)C(u) & A(v)D(u) & B(v)C(u) & B(v)D(u) \\ C(v)A(u) & C(v)B(u) & D(v)A(u) & D(v)B(u) \\ C(v)C(u) & C(v)D(u) & D(v)C(u) & D(v)D(u) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [1+u-v] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & [u-v] & 0 \\ 0 & [u-v] & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [1+u-v] \end{pmatrix}$$

QISM 8

- 得られる代数関係式の主なもの（これは後でも用いる.)

$$[A(u),A(v)]=0 \quad [D(u),D(v)]=0 \quad [B(u),B(v)]=0 \quad [C(u),C(v)]=0$$

$$A(u)B(v)=f(v,u)B(v)A(u)+g(u,v)B(u)A(v) \tag{1}$$

$$B(u)A(v)=f(v,u)A(v)B(u)+g(u,v)A(u)B(v) \tag{2}$$

$$D(u)B(v)=f(u,v)B(v)D(u)+g(v,u)B(u)D(v) \tag{3}$$

$$B(u)D(v)=f(u,v)D(v)B(u)+g(v,u)D(u)B(v) \tag{4}$$

$$A(u)C(v)=f(u,v)C(v)A(u)+g(v,u)C(u)A(v) \tag{5}$$

$$C(u)A(v)=f(u,v)A(v)C(u)+g(v,u)A(u)C(v) \tag{6}$$

$$D(u)C(v)=f(v,u)C(v)D(u)+g(u,v)C(u)D(v) \tag{7}$$

$$C(u)D(v)=f(v,u)D(v)C(u)+g(u,v)D(u)C(v) \tag{8}$$

$$[C(u),B(v)]=g(v,u)(A(u)D(v)-A(v)D(u)) \tag{9}$$

$$[D(u),A(v)]=g(v,u)(B(u)C(v)-B(v)C(u)) \tag{10}$$

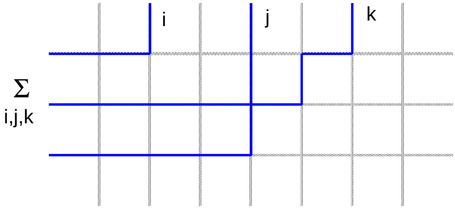
$$f(u,v)=\frac{[1+u-v]}{[u-v]} \qquad g(u,v)=\frac{[1]}{[u-v]}$$

diagonalization 1

- 命題

  転送行列の固有空間を $B(u_1)B(u_2)\cdots B(u_m)|\Omega\rangle$ で構成できる。ただし $\{u\}$ はある代数式 (Bethe Ansatz 方程式) を満たす。ここで m は下向き arrow (-) (=粒子）の数。

  Example $B(u_1)B(u_2)B(u_3)|\Omega\rangle$



diagonalization 2

- 命題
  - $m = 1$

$$
\begin{aligned}
A(u)B(u_1)|\Omega\rangle &= a(u)f(u_1,u)B(u_1)|\Omega\rangle + a(u_1)g(u,u_1)B(u)|\Omega\rangle \\
&= \text{wanted} \ + \text{unwanted} \\
D(u)B(u_1)|\Omega\rangle &= d(u)f(u,u_1)B(u_1)|\Omega\rangle + d(u_1)g(u_1,u)B(u)|\Omega\rangle \\
&= \text{wanted} \ + \text{unwanted}
\end{aligned}
$$

固有状態になる条件 $T(u)B(u_1)|\Omega\rangle \propto B(u_1)|\Omega\rangle$ すなわち、unwanted 同士が相殺

$$
\frac{a(u_1)}{d(u_1)} = -\frac{g(u_1,u)}{g(u,u_1)} = 1
$$

diagonalization 3

- m=一般

$$(A(u)+D(u))\prod_{j=1}^{m} B(u_m)|\Omega\rangle = \text{wanted} + \text{unwanted}$$

$$\text{wanted} = \Lambda(u)\prod_{j=1}^{m} B(u_m)|\Omega\rangle$$

$$\text{unwanted} = \sum_{i=1}^{m} * B(u)B(u_1)\cdots \cancel{B(u_i)}\cdots B(u_m)|\Omega\rangle$$

簡単な計算で

$$\Lambda(u) = a(u)\prod_{j=1}^{m} f(u_j,u) + d(u)\prod_{j=1}^{m} f(u,u_j)$$

diagonalization 4

Theorem (Bethe Ansatz)

unwanted terms は次が満たされている時、すべて相殺する。

$$\frac{a(u_k)}{d(u_k)} \prod_{j=1}^{m} \frac{f(u_j, u_k)}{f(u_k, u_j)} = -1, \quad 1 \leq k \leq m$$

- レポート 2
  上の命題を証明せよ。一般の m で難しいときは $m = 2$ で確かめよ。
- ヒント
  $(A(u) + D(u)) \prod_{j=1}^{m} B(u_m)|\Omega\rangle$ は u_j について対称的であることを用いると unwanted terms が容易に描き下せる。

TQ 関係式

他の記法に合わせるため 次のように定義

$$u \to v - \frac{1}{2} \quad u_j \to v_j - \frac{1}{2} \quad Q(v) = \prod_{j=1}^{m}[v - v_j] \quad \psi(v) = [v]^N$$

eigenvalue $\Lambda(v)$ は次をみたす

$$\Lambda(v)Q(v) = \psi(v + \frac{1}{2})Q(v-1) + \psi(v - \frac{1}{2})Q(v+1)$$

Baxter は 8V 模型の対角化を QISM では行わず、Λ, Q を固有値にもつ演算子 $\mathbb{T}, \mathbb{Q}$ に対して

$$\mathbb{T}(v)\mathbb{Q}(v) = \psi(v + \frac{1}{2})\mathbb{Q}(v-1) + \psi(v - \frac{1}{2})\mathbb{Q}(v+1)$$

を示した。これを Baxter の TQ 関係式といい、様々な局面で登場する。

Bethe ansatz を解くという事 1

$$
\begin{aligned}
\text{m の意味} &= \text{Bethe 方程式の根の数} \\
&= \text{粒子数} \\
&= \text{青線の数} \\
&= \text{磁化 } M_z = \frac{N}{2} - m
\end{aligned}
$$

これは次の交換関係よりわかる。

$$[S_z, B(u)] = -B(u)$$

Theorem (Marshall, Lieb-Schultz)

偶数サイト周期境界条件下で一次元系の基底状態では $M_z = 0$

すなわち 基底状態で $m = \frac{N}{2}$

Bethe ansatz を解くという事 2

- m を固定しても、Bethe ansatz 方程式には様々な解 $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ のパターンが存在する。
- 異なる $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ ごとに（大抵は）異なる固有値 Λ が存在する。
- この意味で　状態 $\leftrightarrow \{v_j\}_{j=1}^{m}$

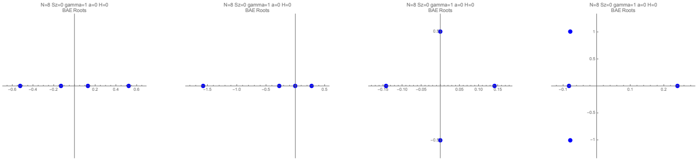


Figure: Examples of $\{v_j\}, N = 8, M_z = 0, \Delta = \cosh 1$. The 1st, 2nd, 3rd, 37th states

Bethe ansatz を解くという事 3

- 通常のやり方。
  1. 適当な初期値から出発してニュートン法で v_j を決める。
  2. $\{v_j\}$ を $\Lambda(v)$ の表式に代入して一つの固有値がもとまる。
  3. 別の初期値から出発してニュートン法で v_j' を決める。
  4. $\{v_j'\}$ を $\Lambda(v)$ の表式に代入して別の固有値がもとまる。
  5. to be continued... 実は多くの場合解は求まらない。
- 少し変わった考え方。[McCoy の方法]

$$\Lambda(v) = \mathrm{e}^{Nv} C_N + \mathrm{e}^{(N-1)v} C_{N-1} + \cdots + \mathrm{e}^{-(N-1)v} C_{-N+1} + \cdots + \mathrm{e}^{-Nv} C_{-N}$$

1. C_i は $\{\mathrm{e}^{v_j}\}_{j=1}^{m}$ の対称関数。
2. ℓ 次の基本対称式を σ_ℓ とすると $C_{N-\ell}$ は　σ_k $(k \leq \ell)$ でかける。
3. C_{N-j} $(1 \leq j \leq m)$ をあたえると m 変数のすべての基本対称式の値がわかる。
4. $\{v_j\}_{j=1}^{m}$ がわかる。

Bethe ansatz を解くという事 4

- すなわち以下の 2 つは同じ事。
  - Bethe ansatz を解き $\{v_j\}$ を求める。　$\Rightarrow$ 保存量を評価する。
  - 十分多くの保存量の固有値を与える。　$\Rightarrow$ 　$\{v_j\}$ を求める
- $N \gg 1$ で多くの励起状態のベーテ根 $\{v_j\}$ を求める事 $=$ 可能な保存量の固有値のセットを与えてしまう事。
- 後者はすでに系の性質が分かってしまっていることを意味する。
- ベーテ根を直接取り扱うことの意味とは何か？

まとめ

- $A \sim D$ の間の「交換関係」は R によって定まる。
- 「交換関係」を用いて転送行列は対角化可能
- 固有状態となるためにはベーテ仮説方程式が必要。
- 　ベーテ仮説方程式の根の数は系のサイズくらい